EXERCICE 4 (7 points)

L'annexe, page 6, sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=\ln(2x)+1-x$.
   a) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

      Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1,+\infty[$ une unique solution notée α.

   b) Démontrer que $\ln(2\alpha)+1=\alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\ln(2u_n)+1$.
   On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y=\ln(2x)+1$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée en annexe page 6.

   a) En utilisant la courbe (Γ), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
   c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Cette courbe est donnée en annexe page 6.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

   $$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt$$

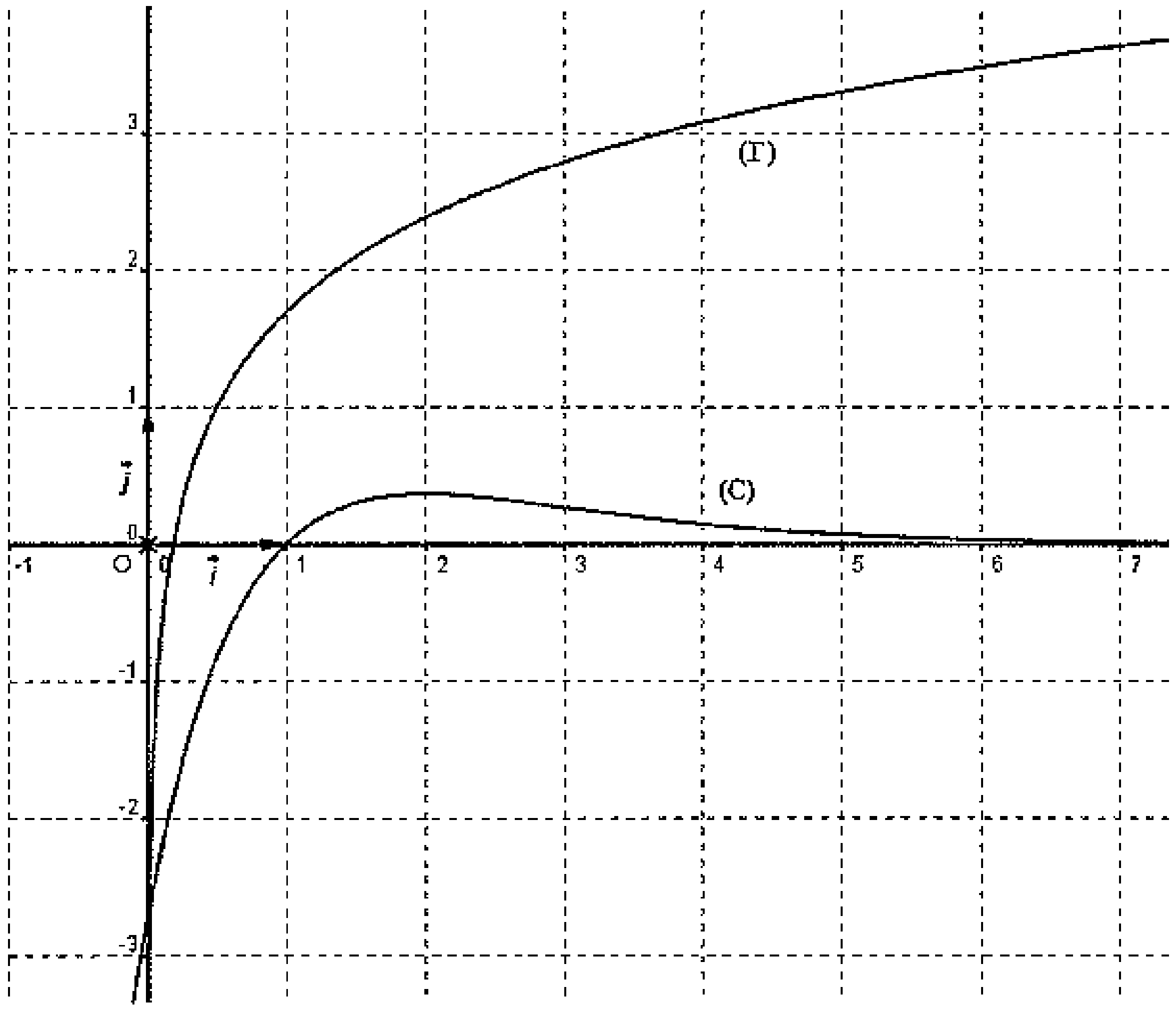
   a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1,+\infty[$.
   b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1,+\infty[$, $F(x)=-xe^{1-x}+1$.
   c) Démontrer que sur $[1,+\infty[$, l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x)+1=x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=a$.
   Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aire, de D_a soit égale $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 4



EXERCICE 4

Partie A

1. a) • La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$g'(x) = \frac{2}{2x} - 1 = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On a $g'(1) = 0$ et pour $x > 1$, $g'(x) < 0$. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

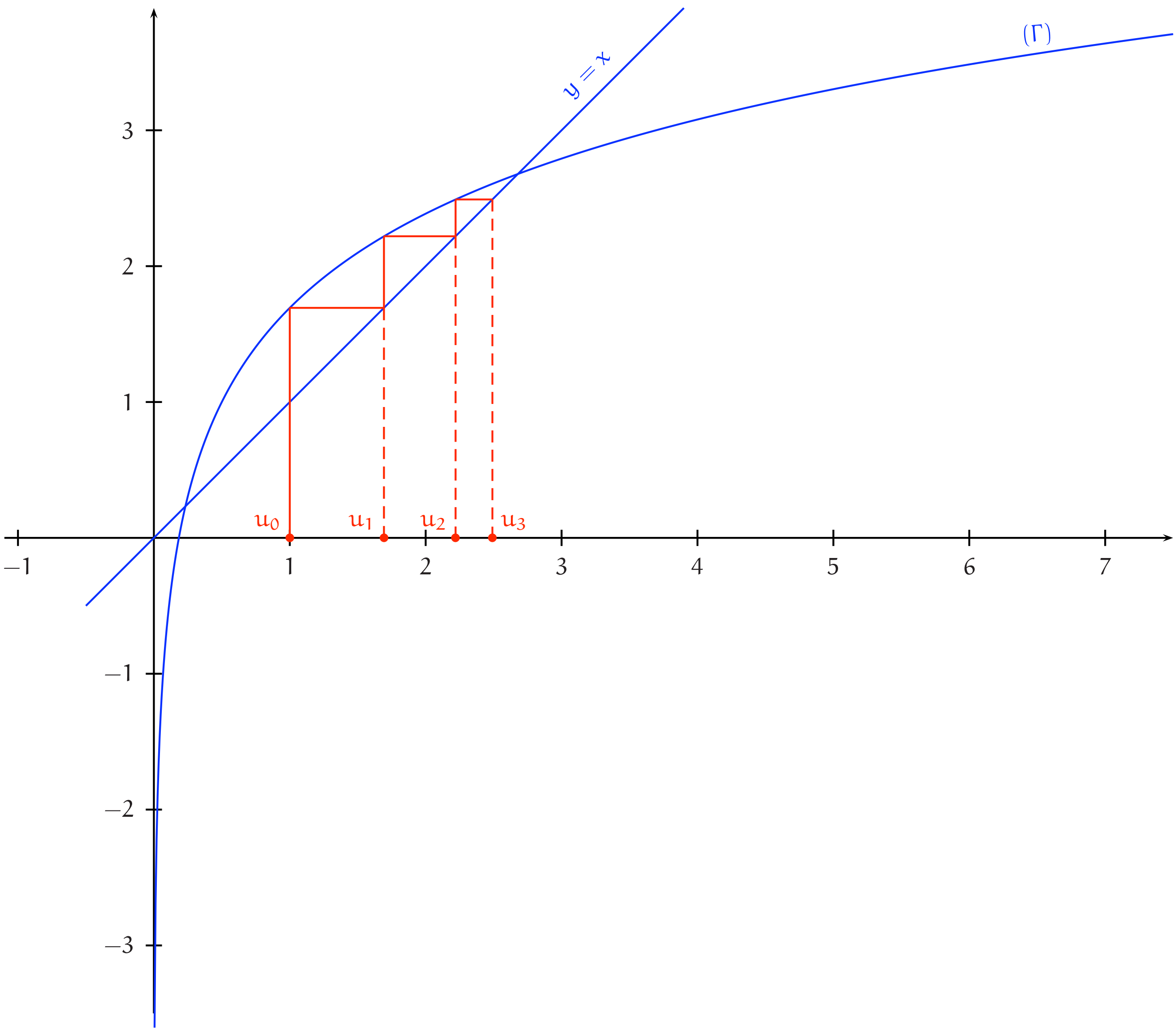
• Pour tout réel $x \geqslant 1$, $g(x) = -x\left(1 - \frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x}\right) = -x\left(1 - 2\frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{x}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 2\frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{x}\right) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

• Ainsi, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Par suite, pour tout réel k de $]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)] =]-\infty, \ln 2]$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$. Comme 0 appartient à $]-\infty, \ln 2]$ (car $\ln 2 > 0$), on a montré en particulier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } [1, +\infty[.}$$

b) L'égalité $g(\alpha) = 0$ s'écrit $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$ ou encore $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. a) Construction des quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$



b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Alors tout d'abord $2u_n > 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $\ln(2\times 1)+1 \leqslant \ln(2u_n)+1 \leqslant \ln(2\times 3)+1$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1+\ln 6 = 2,7\ldots \leqslant 3$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 3.}$$

A partir d'ici, on doit constater que l'énoncé n'est pas résoluble tel qu'il est posé : le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne peut être précisé que si l'on connaît la position de u_n par rapport à α. La question qui devait être posée était donc : « Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ». C'est cette question que l'on résout dorénavant.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$ et puisque $\alpha \geqslant 1$ d'après la question 1.a).

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$. Alors tout d'abord $2u_n > 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $\ln(2 \times 1) + 1 \leqslant \ln(2u_n) + 1 \leqslant \ln(2 \times \alpha) + 1$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ d'après la question 1.b).

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant \alpha.}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \ln(2u_n) + 1 - u_n = g(u_n)$. Or $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ et donc, puisque la fonction g est décroissante sur $[1, \alpha]$, $g(u_n) \geqslant g(\alpha)$ ou encore $g(u_n) \geqslant 0$ et enfin $u_{n+1} \geqslant u_n$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.}$$

c) Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ élément de $[1, \alpha]$. Maintenant, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$, on obtient $\ell = \ln(2\ell) + 1$ ou encore $g(\ell) = 0$. Mais alors $\ell = \alpha$ par unicité de α. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

Partie B

1. a) 1 ère solution. Soient x et y deux réels de $[1, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$.

$$F(y) - F(x) = \int_1^y (t-1)e^{1-t}\,dt - \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \int_x^y (t-1)e^{1-t}\,dt.$$

Pour tout réel t de $[x, y]$, on a $(t-1)e^{1-t} \geqslant 0$ (car $t \geqslant x \geqslant 1$) et donc, par positivité de l'intégrale, $F(y) - F(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour tous réels x et y de $[1, +\infty[$, $x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est croissante sur } [1, +\infty[.}$$

2 ème solution. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$. On sait alors que la fonction F est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ et plus précisément que la fonction F est la primitive de la fonction f qui s'annule en 1. Par suite, pour tout réel $x \geqslant 1$, $F'(x) = f(x) = (x-1)e^{1-x} \geqslant 0$. Puisque la fonction F' est positive sur $[1, +\infty[$, la fonction F est croissante sur $[1, +\infty[$.

b) Soit $x \geqslant 1$. Pour t dans $[1, x]$, posons $u(t) = t - 1$ et $v(t) = -e^{1-t}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, x]$ et pour t dans $[1, x]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(t) = t-1 & v(t) = -e^{1-t} \\ u'(t) = 1 & v'(t) = e^{1-t} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$F(x) = \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \left[(t-1)(-e^{1-t})\right]_1^x - \int_1^x 1 \times (-e^{1-t})\,dt = -(x-1)e^{1-x} - 0 - \left[e^{1-t}\right]_1^x$$
$$= -(x-1)e^{1-x} - (e^{1-x} - e^0) = -xe^{1-x} + 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1, +\infty[,\ F(x) = -xe^{1-x} + 1.}$$

c) Soit x un réel de $[1, +\infty[$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -xe^{1-x} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xe^{1-x} = 1 \Leftrightarrow \ln\left(2xe^{1-x}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln(2x) + \ln(e^{1-x}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x) + 1 - x = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) + 1 = x.$$

2. La fonction f est continue et positive sur $[1, a]$. Donc aire de $(D_a) = \int_1^a f(t)\,dt = F(a)$.

Maintenant, d'après la question précédente, $F(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(2a) + 1 = a \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow a = \alpha$.