BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Liban

EXERCICE 1

Partie A :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$. En particulier, $e^x \neq 0$ et on peut donc écrire $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

• Pour $n = 0$, $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0x} = e^0 = 1$. Donc $(e^x)^0 = e^{0x}$ et l'égalité est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $(e^x)^n = e^{nx}$. Alors

$$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ et pour tout entier naturel } n,\ (e^x)^n = e^{nx}.}$$

Partie B

1. a) Pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est continue sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$. Donc, pour tout entier naturel n, u_n existe.

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 1\,dx = (1-0)\times 1 = 1.
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 + u_1 = 1.}$$

b)

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 -\frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0) \\
&= \ln 2 - \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) = \ln 2 - \ln\left(\frac{e+1}{e}\right) = \ln 2 - (\ln(e+1) - \ln e) = 1 + \ln 2 - \ln(e+1).
\end{aligned}$$

Ensuite, $u_0 = 1 - u_1 = 1 - (1 + \ln 2 - \ln(e+1)) = \ln(e+1) - \ln 2$.

$$\boxed{u_0 = \ln(1+e) - \ln 2 \text{ et } u_1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}).}$$

Remarque. $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = [\ln(e^x+1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2.$

2. Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0,1]$, $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

3. **a)** Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{n}e^{-n}\right) - \left(-\frac{1}{n}e^0\right) = \frac{1-e^{-n}}{n}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question 2, $u_{n+1} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} + u_n \geqslant u_n$. D'après la question précédente, on a alors $u_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}$.

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}.}$$

4. Pour tout entier naturel non nul, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} (1-e^{-n}) = 1$. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et finalement $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

