

EXERCICE 1 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

- 1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
- 2) On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').
- 3) Soit v une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
- 4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
- 5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

- 1) Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.
- 2) On note M_k le point de la courbe \mathcal{C}_k d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.
- 3) Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
 - la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
 - la courbe \mathcal{C}_k d'équation $y = (x+k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.
 - a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).
 - b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
- 4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x} dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)

