BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
France métropolitaine

EXERCICE 1

Partie A :

1) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$u'(x)+u(x)=1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})+xe^{-x}=e^{-x}-xe^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est une solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2) Soit a un réel. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto ke^{-ax}$, $k\in\mathbb{R}$. Ici, $a=1$ et donc les solutions de l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto ke^{-x}$, $k\in\mathbb{R}$.

3) La fonction $v-u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
v \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x)+v(x)=e^{-x}\\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x)+v(x)=u'(x)+u(x)\\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x)-u'(x)+v(x)-u(x)=0\\
&\Leftrightarrow \text{pour tout réel } x,\ (v-u)'(x)+(v-u)(x)=0\\
&\Leftrightarrow v-u \text{ solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4) D'après les deux questions précédentes, v est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $v(x)-u(x)=ke^{-x}$ ou encore pour tout réel x, $v(x)=xe^{-x}+ke^{-x}$.

$$\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x\mapsto(x+k)e^{-x},\ k\in\mathbb{R}.}$$

5) g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Donc, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $g(x)=(x+k)e^{-x}$. Puis

$$g(0)=2\Leftrightarrow(0+k)e^{0}=2\Leftrightarrow k=2.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x)=(x+2)e^{-x}.}$$

Partie B

1) Soit $k\in\mathbb{R}$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_k'(x)=1\times e^{-x}+(x+k)\times(-e^{-x})=e^{-x}-(x+k)e^{-x}=(-x+(1-k))e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x}>0$ et donc pour tout réel x, $f_k'(x)$ est du signe de $-x+(1-k)$. Par suite, pour tout réel x de $]-\infty,1-k]$, $f_k'(x)\geqslant 0$ et pour tout réel x de $[1-k,+\infty[$, $f_k'(x)\leqslant 0$.
On en déduit que la fonction f_k est croissante sur $]-\infty,1-k]$ et décroissante sur $[1-k,+\infty[$ puis que

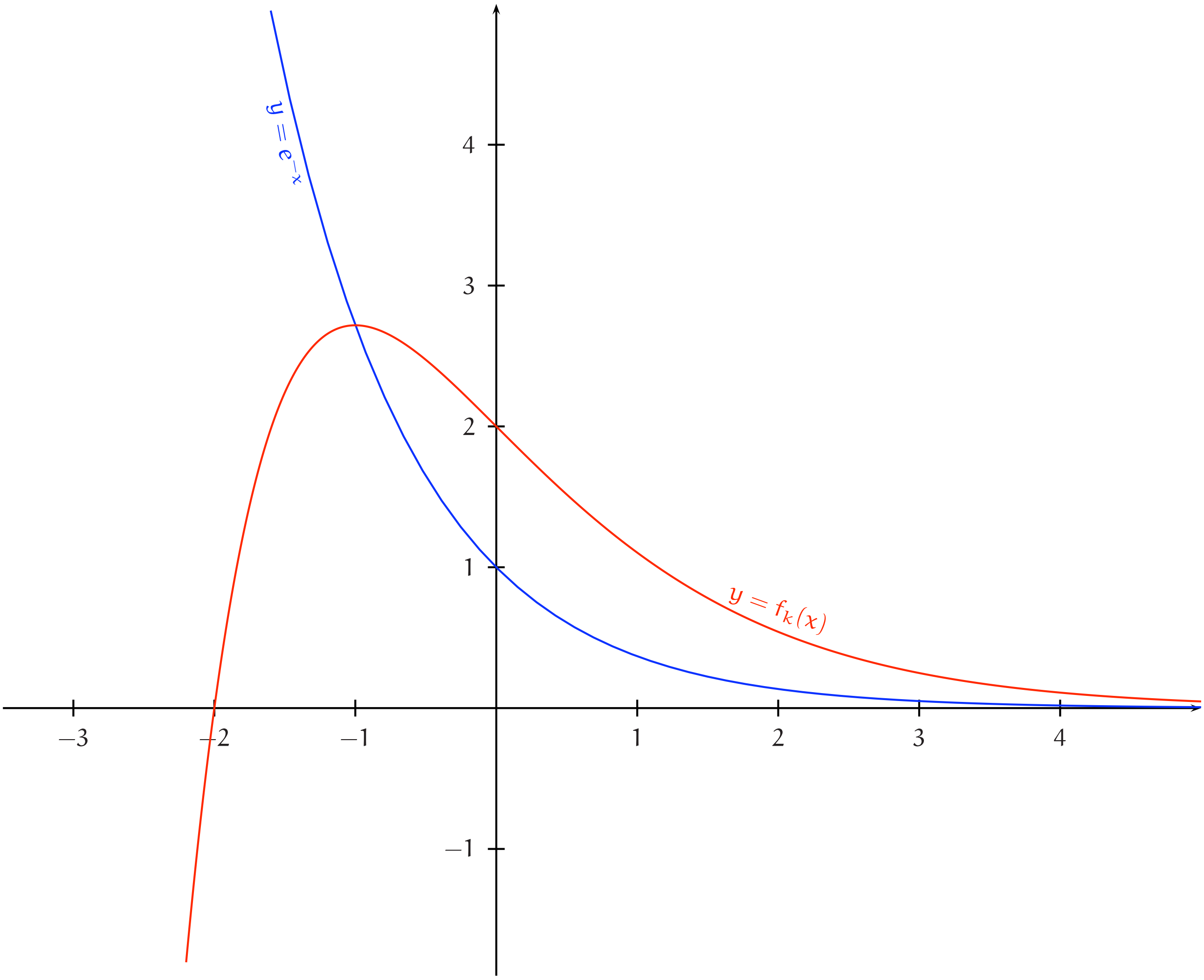
$$\boxed{\text{la fonction } f_k \text{ admet un maximum en } 1-k.}$$

2) Soit $k \in \mathbb{R}$.

$$f_k(1-k) = (1-k+k)e^{-(1-k)} = e^{-(1-k)}.$$

Ainsi, $y_{M_k} = e^{-x_{M_k}}$ et donc le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3) a) La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Son graphe ne peut être la courbe rouge. Donc la courbe rouge est une courbe $\mathscr{C}_k$ et la courbe bleue est la courbe Γ.



b) Puisque $e^{-0} = 1$, la courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 1)$ ce qui définit l'unité choisie en ordonnée.
Mais alors, la courbe bleue coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 2)$ et donc la fonction f_k est la solution de l'équation (E) prenant la valeur 2 en 0. Il s'agit donc de la fonction g déterminée à la question A.5).

4) Pour x dans $[0, 2]$, posons $u(x) = x + 2$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 2]$ et pour x dans $[0, 2]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x + 2 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx &= \left[(x+2)(-e^{-x})\right]_0^2 - \int_0^2 1 \times (-e^{-x})\,dx = -4e^{-2} - (-2e^0) - \left[e^{-x}\right]_0^2 \\ &= -4e^{-2} + 2 - (e^{-2} - 1) = 3 - 5e^{-2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx = 3 - 5e^{-2}.}$$

Puisque la fonction g est positive sur $[0, 2]$, le nombre obtenu est l'aire en unités d'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.