EXERCICE 1 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

3) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1) Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.

2) On note M_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

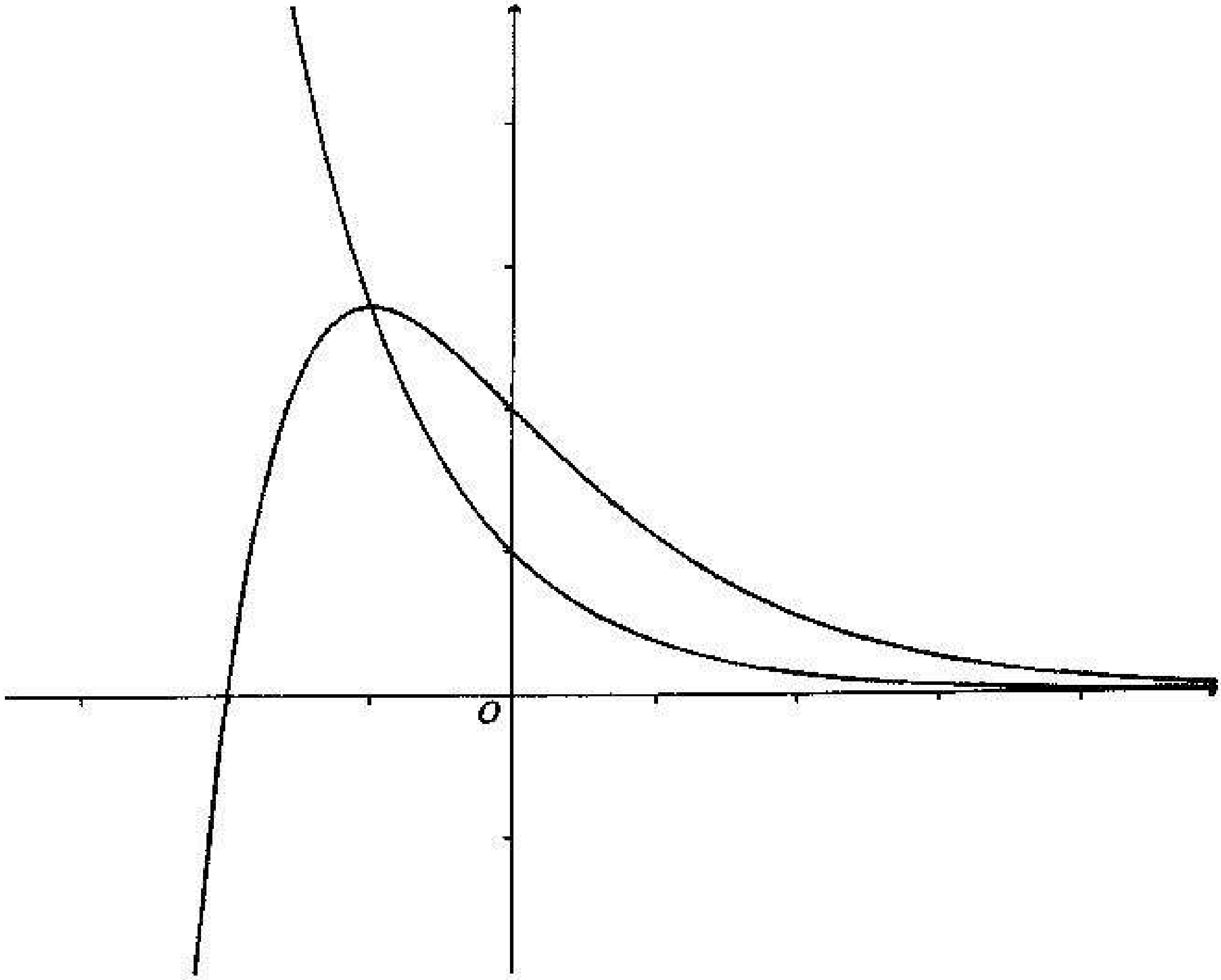
3) Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas.
Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
   - la courbe $\mathcal{C}_k$ d'équation $y = (x+k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

   b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

France métropolitaine

EXERCICE 1

Partie A :

1) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$u'(x) + u(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + xe^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est une solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2) Soit a un réel. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{-ax}$, $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 1$ et donc les solutions de l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3) La fonction $v - u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
v \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x) + v(x) = e^{-x} \\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x) \\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x) - u'(x) + v(x) - u(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{pour tout réel } x,\ (v-u)'(x) + (v-u)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow v - u \text{ solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4) D'après les deux questions précédentes, v est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $v(x) - u(x) = ke^{-x}$ ou encore pour tout réel x, $v(x) = xe^{-x} + ke^{-x}$.

$$\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto (x+k)e^{-x},\ k \in \mathbb{R}.}$$

5) g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Donc, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $g(x) = (x+k)e^{-x}$. Puis

$$g(0) = 2 \Leftrightarrow (0+k)e^{0} = 2 \Leftrightarrow k = 2.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x) = (x+2)e^{-x}.}$$

Partie B

1) Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_k'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+k) \times (-e^{-x}) = e^{-x} - (x+k)e^{-x} = (-x + (1-k))e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f_k'(x)$ est du signe de $-x + (1-k)$. Par suite, pour tout réel x de $]-\infty, 1-k]$, $f_k'(x) \geqslant 0$ et pour tout réel x de $[1-k, +\infty[$, $f_k'(x) \leqslant 0$.
On en déduit que la fonction f_k est croissante sur $]-\infty, 1-k]$ et décroissante sur $[1-k, +\infty[$ puis que

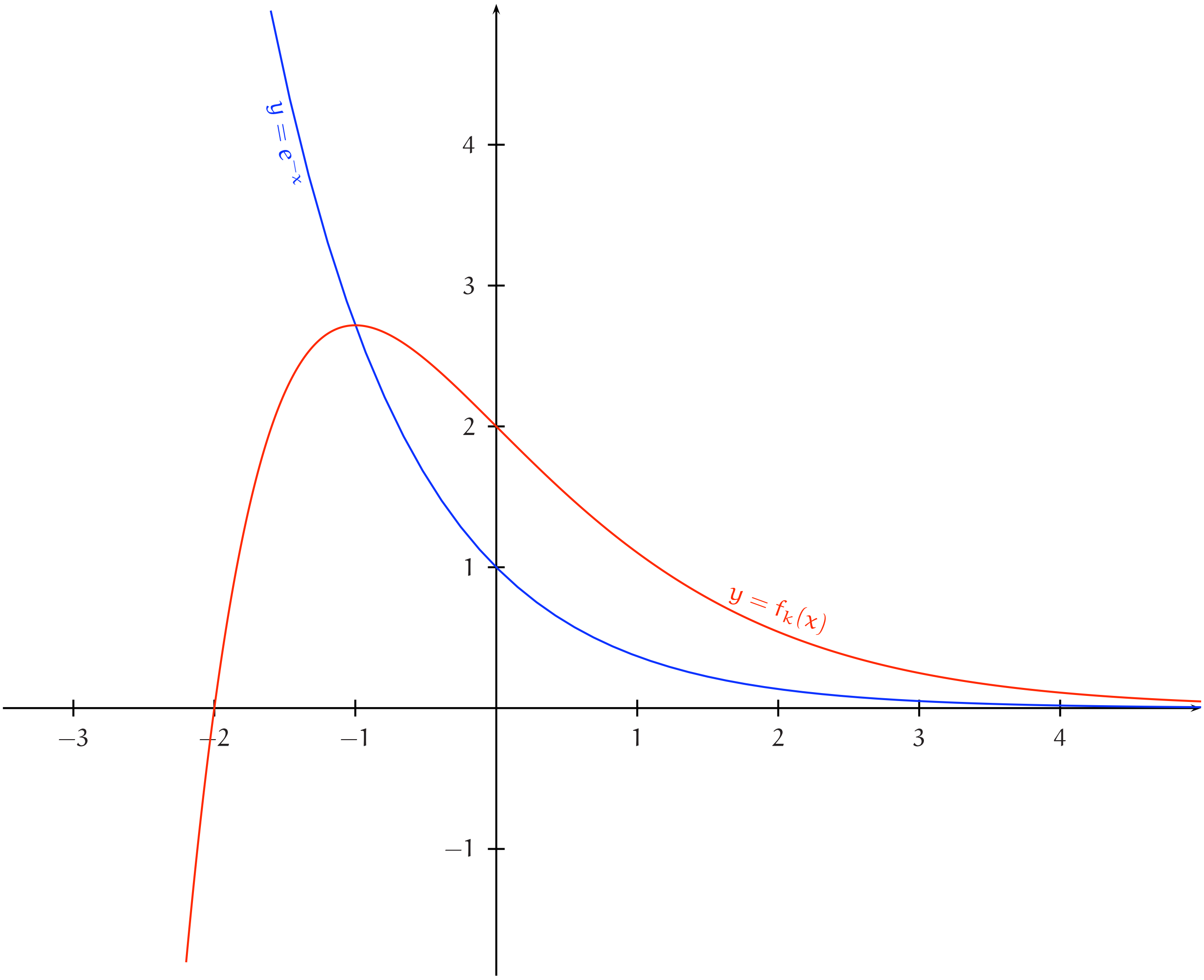
$$\boxed{\text{la fonction } f_k \text{ admet un maximum en } 1-k.}$$

2) Soit $k \in \mathbb{R}$.

$$f_k(1-k) = (1-k+k)e^{-(1-k)} = e^{-(1-k)}.$$

Ainsi, $y_{M_k} = e^{-x_{M_k}}$ et donc le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3) **a)** La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Son graphe ne peut être la courbe rouge. Donc la courbe rouge est une courbe $\mathscr{C}_k$ et la courbe bleue est la courbe Γ.



b) Puisque $e^{-0} = 1$, la courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 1)$ ce qui définit l'unité choisie en ordonnée.
Mais alors, la courbe bleue coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 2)$ et donc la fonction f_k est la solution de l'équation (E) prenant la valeur 2 en 0. Il s'agit donc de la fonction g déterminée à la question A.5).

4) Pour x dans $[0, 2]$, posons $u(x) = x + 2$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 2]$ et pour x dans $[0, 2]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x+2 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx &= \left[(x+2)(-e^{-x})\right]_0^2 - \int_0^2 1 \times (-e^{-x})\,dx = -4e^{-2} - (-2e^0) - \left[e^{-x}\right]_0^2 \\ &= -4e^{-2} + 2 - (e^{-2} - 1) = 3 - 5e^{-2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx = 3 - 5e^{-2}.}$$

Puisque la fonction g est positive sur $[0, 2]$, le nombre obtenu est l'aire en unités d'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.