**EXERCICE 3 (6 points )**

**(Commun à tous les candidats)**

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathscr{T}$ commune à ces deux courbes.

**1.** Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

**2.** On désigne par $a$ et $b$ deux réels quelconques, par $A$ le point d'abscisse $a$ de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par $B$ le point d'abscisse $b$ de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

**a)** Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point $A$.

**b)** Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point $B$.

**c)** En déduire que les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues si et seulement si les réels $a$ et $b$ sont solutions du système $(S)$ :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$

**d)** Montrer que le système $(S)$ est équivalent au système $(S')$ :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$

**3.** Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

**a)** Montrer que pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\ ;\ 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

**b)** En déduire que l'équation $(E)$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.

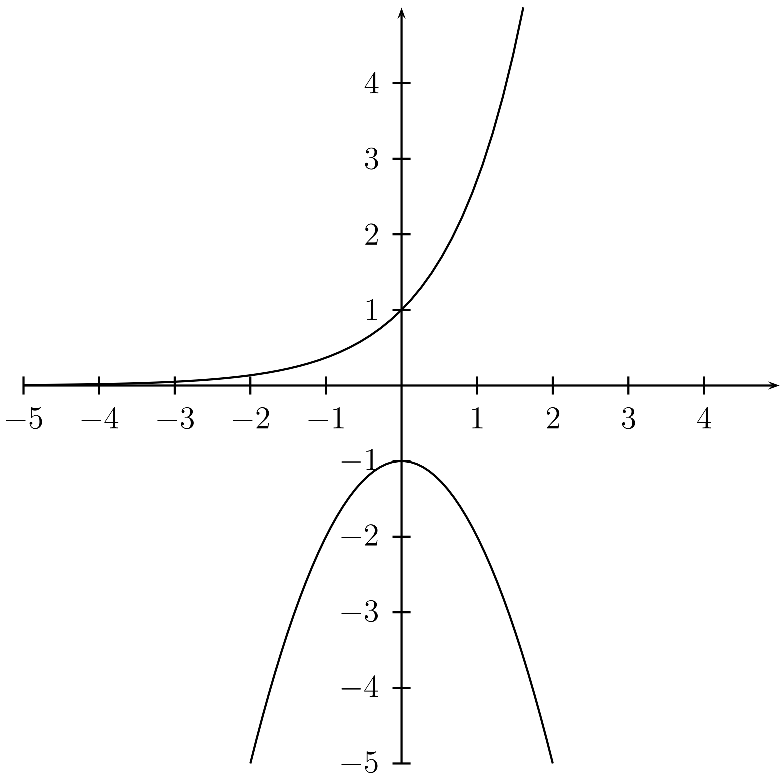
**c)** Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

**d)** Démontrer que l'équation $(E)$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note $a$ cette solution. Donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $a$.

**4.** On prend pour $A$ le point d'abscisse $a$. Déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ du réel $b$ pour lesquels les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues.

**FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)**

**Annexe1 (Exercice 3, question 1)**




**Annexe 2 (Exercice 4, question 2.a)**