EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathscr{T}$ commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

a) Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A.

b) Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B.

c) En déduire que les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$

d) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

a) Montrer que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.

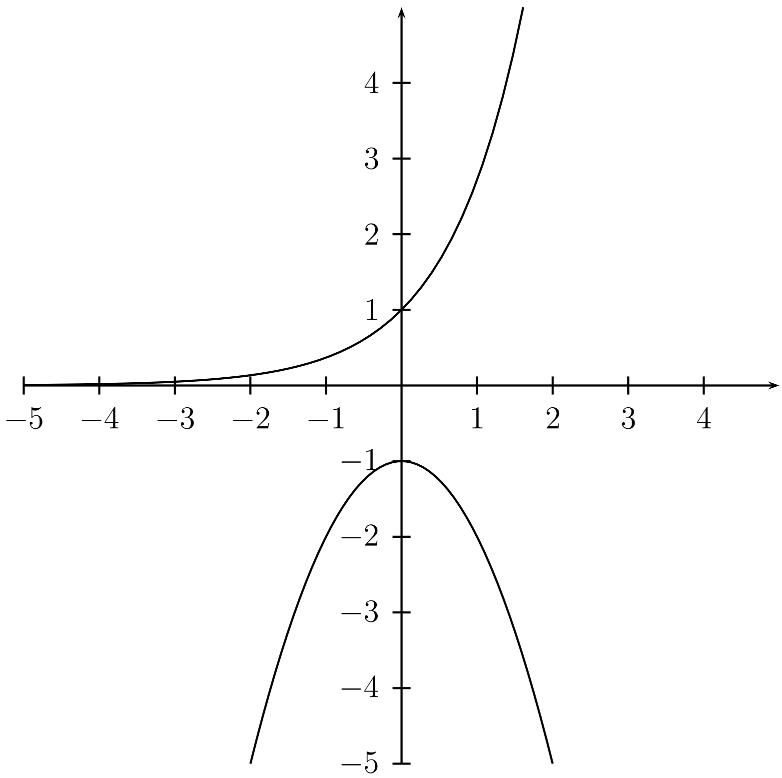
c) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

d) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

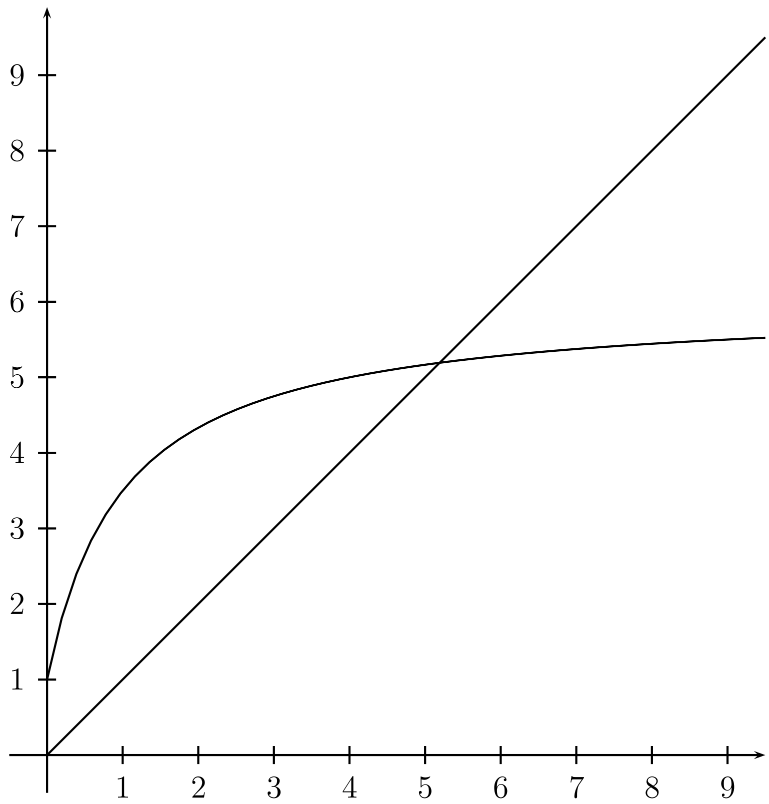
4. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lesquels les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe1 (Exercice 3, question 1)

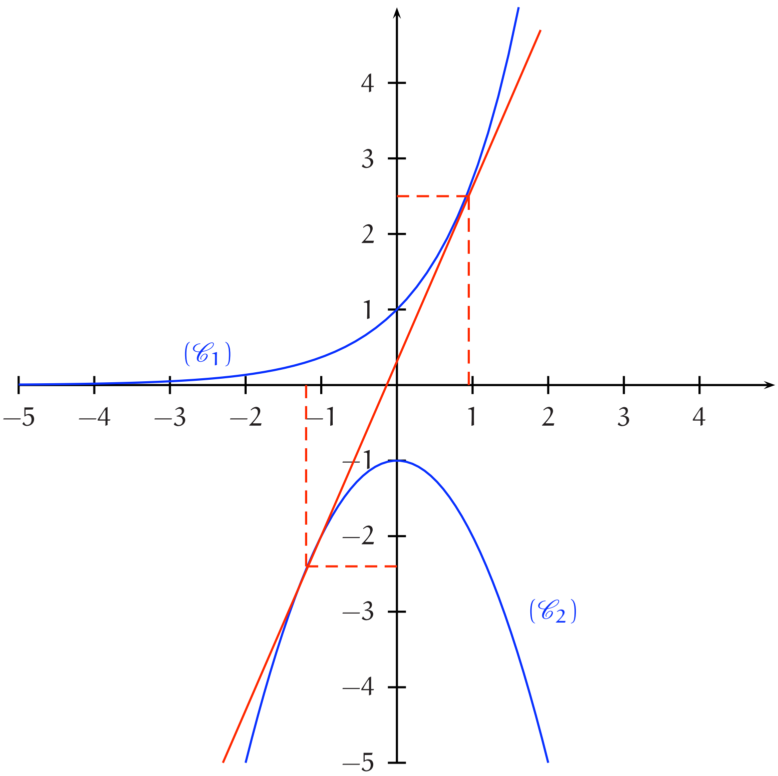


Annexe 2 (Exercice 4, question 2.a)



EXERCICE 3

1.



L'abscisse du point de contact de cette tangente avec $(\mathscr{C}_1)$ vaut environ $-1,2$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec $(\mathscr{C}_2)$ vaut environ $0,9$.

2. a) On note g la fonction $x \mapsto e^x$ et h la fonction $x \mapsto -x^2 - 1$.
Une équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ est $y = g'(a)(x-a) + g(a)$ ou encore $y = e^a(x-a) + e^a$ ou enfin $y = e^a x + e^a - ae^a$.

b) Une équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ est $y = h'(b)(x-b) + h(b)$ ou encore $y = (-2b)(x-b) - b^2 - 1$ ou enfin $y = -2bx + b^2 - 1$.

c) Les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues si et seulement si elles ont le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine. Ces dernières conditions sont équivalentes au système $\left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{array}\right.$.

d)

$$\left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = \left(-\dfrac{e^a}{2}\right)^2 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ 4e^a - 4ae^a = e^{2a} - 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{array}\right..$$

3. a) Soit x un réel de $]-\infty, 0[$. Alors $2x < 0$ puis $e^{2x} < 1$ puis $e^{2x} - 4 < -3$ et en particulier $e^{2x} - 4 < 0$. D'autre part, puisque $x - 1 < 0$ et $4e^x > 0$, on a $4e^x(x-1) < 0$.

b) Mais alors $f(x) = (e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1) < 0$. En particulier, pour tout réel x de $]-\infty, 0[$, $f(x) \neq 0$ et donc

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ n'a pas de solution dans l'intervalle }]-\infty, 0[.}$$

c) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x.$$

Par suite, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant e^{2x}$ et en particulier $f'(x) > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

d) $f(0) = e^0 + 0 - 4e^0 - 4 = -7$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - 4) = +\infty$. Mais on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^x(x-1) = +\infty$ et finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Maintenant, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et on sait que pour tout réel k de $[f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [-7, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, comme 0 appartient à $[-7, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

La machine fournit $f(0,84) = -0,1\ldots < 0$ et $f(0,85) = 0,07\ldots > 0$ Par suite, $f(0,84) < f(a) < f(0,85)$ et puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on a montré que

$$\boxed{0,84 < a < 0,85.}$$

4. $0,84 < a < 0,85 \Rightarrow e^{0,84} < e^a < e^{0,85} \Rightarrow -\dfrac{e^{0,85}}{2} < -\dfrac{e^a}{2} < -\dfrac{e^{0,84}}{2}$. Donc

$$-\frac{e^{0,85}}{2} < b < -\frac{e^{0,84}}{2}.$$

Maintenant, la machine fournit $-\dfrac{e^{0,85}}{2} = 1,16\ldots$ et $\dfrac{e^{0,84}}{2} = 1,15\ldots$ On en déduit que

$$\boxed{-1,2 < b < -1,1.}$$

