EXERCICE 4 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Etude des limites

a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Etude des variations de la fonction f

a) Démontrer que la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie B Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}\, dx.$$

1. Calculer I_2.

2. Une relation de récurrence

a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) I_n.$$

b) Calculer I_3.

3. Etude de la limite de la suite de terme général I_n

a) Etablir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}.$$

b) En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).

EXERCICE 4

Partie A

1. Etude des limites

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

c) On en déduit que les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire les deux axes de coordonnées, sont asymptotes à la courbe représentative de f.

2. Etude des variations de la fonction f

a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).}$$

b) Pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x^4} > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$ et $2x + 1 > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) < 0$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

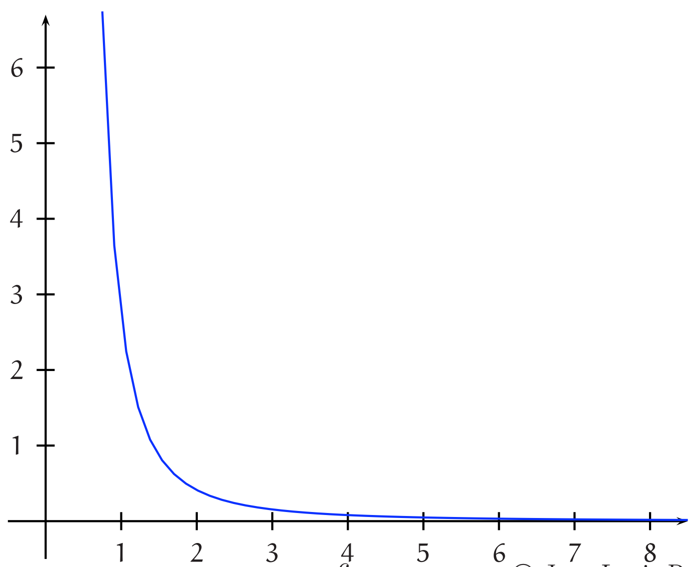
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $-$	
f	$\Vert$ $+\infty$ $\searrow$	0

c) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\right[=]0,+\infty[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans $]0,+\infty[$. En particulier, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α dans $]0,+\infty[$.

La machine donne $f(1,105) = 2,02\ldots > 2$ et $f(1,11) = 1,99\ldots$ Donc $f(1,105) > f(\alpha) > f(1,11)$. Comme f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $1,105 < \alpha < 1,11$ et donc que

$$\boxed{\alpha = 1,11 \text{ arrondi au centième.}}$$

3.



Partie B

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $[1,2]$ et donc I_2 existe. De plus,

$$I_2 = \int_1^2 -\left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}\,dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e^1 = e - \sqrt{e}.$$

$$\boxed{I_2 = e - \sqrt{e}.}$$

2. Une relation de récurrence

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1ère solution. Pour x dans $[1,2]$, posons $u(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1,2]$ et pour x dans $[0,2]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = e^{\frac{1}{x}} & v(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} \\ u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & v'(x) = \dfrac{1}{x^n} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1,2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\,dx = \frac{1}{1-n}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}} - e^1\right) + \frac{1}{1-n}\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\,dx \\ &= \frac{1}{1-n}\left(\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $(1-n)I_n = \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1}$ puis que $I_{n+1} = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.}$$

2ème solution (une intégration par parties un peu plus astucieuse). $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^2 \left(-\frac{1}{x^{n-1}}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\,dx$. On pose donc $u(x) = -\dfrac{1}{x^{n-1}}$, $u'(x) = \dfrac{n-1}{x^n}$, $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ et $v(x) = e^{\frac{1}{x}}$. On obtient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^2 u(x)v'(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{n-1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\,dx \\ &= -\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + e - (n-1)I_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n. \end{aligned}$$

b) En particulier, $I_3 = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^1} + (1-2)I_2 = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2} - (e - \sqrt{e}) = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

$$\boxed{I_3 = \frac{\sqrt{e}}{2}.}$$

3. Etude de la limite de la suite de terme général I_n

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit x un réel de $[1,2]$. On a $e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^n} \geqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$. D'autre part, $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$ et, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{\frac{1}{x}} \leqslant e^1 = e$. En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par le réel positif $\dfrac{1}{x^n}$, on obtient $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{e}{x^n}$. On a montré que

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel x de $[1, 2]$, $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$ et donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.

D'autre part, pour tout réel x de $[1, 2]$, $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{e}{x^n}$ et donc par croissance de l'intégrale,

$$I_n \leqslant \int_1^2 \frac{e}{x^n}\,dx = e\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^2 = \frac{e}{n-1}\left(-\frac{1}{2^{n-1}}+1\right) \leqslant \frac{e}{n-1}.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n-1}.}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n-1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

