BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Rochambeau

EXERCICE 1

Partie A : Etude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours.

1) Puisque la fonction y est dérivable sur l'intervalle $[0, 30]$ et strictement positive, la fonction z est dérivable sur l'intervalle $[0, 30]$. Ensuite,

$$y(0) = 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{z(0)} = 0,01 \Leftrightarrow z(0) = \frac{1}{0,01} \Leftrightarrow z(0) = 100.$$

D'autre part,

$$y' = 0,05y(10-y) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}\right)' = 0,05 \times \frac{1}{z}\left(10 - \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{0,5}{z} - \frac{0,05}{z^2} \Leftrightarrow z' = -z^2\left(\frac{0,5}{z} - \frac{0,05}{z^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow z' = -0,5z + 0,05.$$

Finalement

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10-y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{array}\right..}$$

2) a) On sait que les solutions de l'équation différentielle $z' = az + b$, a et b réels donnés tels que $a \neq 0$, sont les fonctions de la forme $z\ :\ t \mapsto -\frac{b}{a} + Ke^{at}$ où K est un réel. Ici, $a = -0,5$ et $b = 0,05$ et donc il existe un réel K tel que pour tout réel t de l'intervalle $[0, 30]$, $z(t) = \frac{0,05}{0,5} + Ke^{-0,5t} = 0,1 + Ke^{-0,5t}$.
La condition $z(0) = 100$ fournit alors $100 = 0,1 + Ke^0$ et donc $K = 99,9$. Ainsi,

$$\text{pour tout réel } t \text{ de } [0, 30],\ z(t) = 99,9e^{-0,5t} + 0,1.$$

La fonction z obtenue est effectivement strictement positive sur l'intervalle $[0, 30]$ et donc

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ de } [0, 30],\ y(t) = \frac{1}{99,9e^{-0,5t} + 0,1}.}$$

b) Le pourcentage de la population infectée après 30 jours est

$$y(30) = \frac{1}{99,9e^{-0,5\times30} + 0,1} = \frac{1}{99,9e^{-15} + 0,1} = 9,9\ldots.$$

$$\boxed{\text{Le pourcentage de la population infectée après 30 jours est 10\% arrondi à l'unité.}}$$

Partie B : Etude de l'efficacité d'un vaccin.

1) On note V l'événement « l'individu est vacciné » et M l'événement « l'individu tombe malade ». La probabilité demandée est $p(\overline{V} \cap M)$. L'énoncé donne $p(V) = 0,25$, $p_V(\overline{M}) = 0,92$ et $p(M) = 0,1$.

On en déduit $P_V(M) = 1 - p_V(\overline{M}) = 0,08$ puis $p(V \cap M) = p(V) \times p_V(M) = 0,25 \times 0,08 = 0,02$. Enfin, d'après la formule des probabilités totales, $p(V \cap M) + p(\overline{V} \cap M) = p(M)$ et donc

$$p(\overline{V} \cap M) = p(M) - p(V \cap M) = 0,1 - 0,02 = 0,08.$$

La probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est $0,08$.

2) La probabilité demandée est $p_{\overline{V}}(M)$.

$$p_{\overline{V}}(M) = \frac{p(\overline{V} \cap M)}{p(\overline{V})} = \frac{0,08}{1 - 0,25} = \frac{8}{75} = 0,106\ldots.$$

La probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné est $0,11$ arrondi au centième.

EXERCICE 2

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Alors, pour tout réel x de $[a,b]$, $g(x)-f(x) \geqslant 0$ puis par positivité de l'intégrale, $\int_a^b (g(x)-f(x))\ dx \geqslant 0$ et enfin, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$. On a ainsi montré que $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

PARTIE B

1) a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, on a $-1 \leqslant -x^2 \leqslant 0$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout réel x de $[0,1]$, $e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^0$ et finalement

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ \frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1.}$$

b) L'inégalité de la moyenne permet alors d'affirmer que $\frac{1}{e} \times (1-0) \leqslant \int_0^1 f(x)\ dx \leqslant 1 \times (1-0)$ et donc que

$$\boxed{\frac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1.}$$

2) Pour tout réel x de $[0,1]$, $xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}(-2x)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}(e^{-x^2})'$ et donc

$$u_1 = \int_0^1 xe^{-x^2}\ dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).}$$

3) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n f(x) \geqslant 0$. On en déduit que $\int_0^1 x^n f(x)\ dx \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x^2}\ dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2}\ dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}e^{-x^2} - x^n e^{-x^2}\right)\ dx = \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x^2}\ dx.$$

Maintenant, pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n \geqslant 0$, $e^{-x^2} \geqslant 0$ et $(x-1) \leqslant 0$ et donc $x^n(x-1)e^{-x^2} \leqslant 0$. On en déduit par croissance de l'intégrale que $u_{n+1} - u_n \leqslant \int_0^1 0\ dx = 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0,1]$, $e^{-x^2} \leqslant e^0 = 1$ et donc, puisque $x^n \geqslant 0$, pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n e^{-x^2} \leqslant x^n$. On en déduit par croissance de l'intégrale que

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\ dx \leqslant \int_0^1 x^n\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

b) Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

EXERCICE 3

1) Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$ et le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$.
Le point I est le centre du carré ADHE et donc le milieu de la diagonale [DE]. On en déduit que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_D + x_E}{2}, \frac{y_D + y_E}{2}, \frac{z_D + z_E}{2}\right)$ ou encore $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De même, les points B et D ont pour coordonnées respectives $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Puisque le point J est le milieu du segment [BD], le point J a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Enfin, le point K est le milieu du segment [IJ] et donc le point K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$\boxed{\text{Les points I, J et K ont respectivement pour coordonnées } \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).}$$

2) Le point A a pour coordonnées $(0,0,0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Ensuite, puisque $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AG}$, on doit avoir $1 \times k = \frac{1}{4}$ et aussi $1 \times k = \frac{1}{2}$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points A, K et G ne sont pas alignés.}}$$

Les points A, K et G définissent donc un unique plan.

3) a) Déjà le milieu K du segment [IJ] est dans le plan (AKG). Il reste à vérifier que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (AKG). Pour cela, vérifions que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ du plan (AKG).

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et donc

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 0,$$

et

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 = 0.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{Le plan (AKG) est le plan médiateur du segment [IJ].}}$$

b) Le plan (AKG) est le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{IJ}$. Une équation cartésienne du plan (AKG) est donc $\frac{1}{2}(x-0) + 0(y-0) - \frac{1}{2}(z-0) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (AKG) est } x - z = 0.}$$

c) Le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$ et donc $x_D - z_D = 0$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{le point D appartient au plan (AKG).}}$$

4) a) Les points D et G ont respectivement pour coordonnées $(0,1,0)$ et $(1,1,1)$. Le point L est le milieu du segment [DG] et a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$. Par suite, le milieu du segment [AL] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Le milieu du segment [AL] est donc le point K.

$$\boxed{\text{Le point K est le milieu du segment [AL].}}$$

b) Le point L est le milieu du segment [DG] et donc, d'après le théorème du barycentre partiel, $K = \text{bar}(A(2), L(2)) = \text{bar}(A(2), D(1), G(1))$.

$$\boxed{K = \text{bar}(A(2), L(2)) = \text{bar}(A(2), D(1), G(1)).}$$

EXERCICE 4

1) a) $23 \times (-2) + 47 \times 1 = -46 + 47 = 1$.

$$\boxed{\text{Une solution particulière de } (E) \text{ est } (x_0, y_0) = (-2, 1).}$$

b) La question précédente et le théorème de BÉZOUT permettent d'affirmer que les entiers 23 et 47 sont premiers entre eux.

Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$(x, y) \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow 23x + 47y = 1 \Leftrightarrow 23x + 47y = 23x_0 + 47y_0 \Leftrightarrow 23(x - x_0) = 47(y_0 - y).$$

Puisque l'entier 47 divise l'entier $47(y_0 - y)$, nécessairement l'entier 47 divise l'entier $23(x - x_0)$. Puisque les entiers 23 et 47 sont premiers entre eux, l'entier 47 divise l'entier $x - x_0$ d'après le théorème de GAUSS. Donc, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 47k$ ou encore $x = x_0 + 47k$. De même, il existe un entier k' tel que $y_0 - y = 23k'$ ou encore $y = y_0 - 23k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 47k$ et $y = y_0 - 23k'$.

$$\begin{aligned} 23x + 47y = 1 &\Leftrightarrow 23(x_0 + 47k) + 47(y_0 - 23k') = 1 \Leftrightarrow 23x_0 + 47y_0 + 23 \times 47 \times (k - k') = 1 \Leftrightarrow 23 \times 47 \times (k - k') = 0 \\ &\Leftrightarrow k = k'. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont les couples de la forme } (-2 + 47k, 1 - 23k),\ k \in \mathbb{Z}.}$$

c) Soit x un entier relatif. Si $23x \equiv 1\ (47)$ alors il existe un entier relatif y tel que $23x + 47y = 1$ puis, d'après la question précédente, il existe un entier relatif k tel que $x = -2 + 47k$. Réciproquement, s'il existe un entier relatif k tel que $x = -2 + 47k$, alors $23x = -46 + 23 \times 47k$ et donc $23x \equiv -46\ (47)$ ou encore $23x \equiv 1\ (47)$.
En résumé, $23x \equiv 1\ (47)$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = -2 + 47k$.

Soient k un entier relatif puis $x = -2 + 47k$.

$$1 \leqslant x \leqslant 46 \Leftrightarrow 1 \leqslant -2 + 47k \leqslant 46 \Leftrightarrow 3 \leqslant 47k \leqslant 48 \Leftrightarrow \frac{3}{48} \leqslant k \leqslant \frac{48}{47} \Leftrightarrow k = 1.$$

Pour $k = 1$, on obtient $x = 45$ qui est bien dans A. Ainsi, il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1\ (47)$ à savoir

$$\boxed{x = 45.}$$

2) a) Soient a et b deux entiers relatifs tels que $ab \equiv 0\ (47)$. Supposons que $a \not\equiv 0\ (47)$ et montrons que $b \equiv 0\ (47)$ ou encore supposons que a n'est pas divisible par 47 et montrons que b est divisible par 47.

47 est un nombre premier ($\sqrt{47} = 6, \ldots$ et 47 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5). Puisque a n'est pas divisible par 47 et que 47 est premier, a est premier à 47. Puisque 47 divise ab et est premier à a, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que 47 divise b ou encore que $b \equiv 0\ (47)$.

$$\boxed{\text{si } ab \equiv 0\ (47) \text{ alors } a \equiv 0\ (47) \text{ ou } b \equiv 0\ (47).}$$

b) Soit a un entier relatif. D'après la question précédente

$$\begin{aligned} a^2 \equiv 1\ (47) &\Leftrightarrow a^2 - 1 \equiv 0\ (47) \Leftrightarrow (a - 1)(a + 1) \equiv 0\ (47) \Leftrightarrow a - 1 \equiv 0\ (47) \text{ ou } a + 1 \equiv 0\ (47) \\ &\Leftrightarrow a \equiv 1\ (47) \text{ ou } a \equiv -1\ (47). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{si } a^2 \equiv 1\ (47) \text{ alors } a \equiv 1\ (47) \text{ ou } a \equiv -1\ (47).}$$

3) a) Soit p un élément de A. p est un entier compris entre 1 et 46. Un diviseur commun à p et 47 est un diviseur de 47 compris entre 1 et 46 et est donc égal à 1 puisque 47 est premier. Ainsi, les entiers p et 47 sont premiers entre eux.
D'après le théorème de BÉZOUT, il existe des entiers q et k tels que $pq + 47k = 1$. Pour cet entier q, on a $p \times q \equiv 1\ (47)$.

$$\boxed{\text{pour tout entier } p \text{ de } A, \text{ il existe un entier relatif } q \text{ tel que } p \times q \equiv 1\ (47).}$$

b) Si $p = inv(p)$, alors $p \times p \equiv 1$ (47) puis $p \equiv 1$ (47) ou $p \equiv -1$ (47) ou encore $p \equiv 1$ (47) ou $p \equiv 46$ (47) d'après la question 2)b). Réciproquement, si $p \equiv 1$ (47) ou $p \equiv 46$ (47), on a $p = inv(p)$ car $1 \times 1 \equiv 1$ (47) et $(-1) \times (-1) \equiv 1$ (47).

$$\boxed{\text{Les éléments de } A \text{ tels que } p = inv(p) \text{ sont 1 et 46.}}$$

c) Vérifions tout d'abord que si p et p' sont deux éléments distincts de A, $inv(p)$ et $inv(p')$ sont distincts.
Supposons par l'absurde que p et p' sont deux éléments distincts de A tels que $inv(p) = inv(p')$. Alors les égalités $p \times inv(p) \equiv 1$ (47) et $p' \times inv(p) \equiv 1$ (47) fournissent $(p - p') \times inv(p) \equiv 0$ (47) ou encore 47 divise $(p - p') \times inv(p)$. Comme $inv(p)$ est compris entre 1 et 46, $inv(p)$ est premier à 47 et le théorème de Gauss permet encore une fois d'affirmer que 47 divise $p - p'$ ou encore $p \equiv p'$ (47). Enfin, comme p et p' sont compris entre 1 et 46, ceci impose $p = p'$. On aboutit à une contradiction.
Donc, si $p \neq p'$ alors $inv(p) \neq inv(p')$. En particulier, un entier compris entre deux et 45 a un inverse modulo 47 qui est compris entre 2 et 45 (car $1 = inv(1)$ et $46 = inv(46)$).

D'après ce qui précède, les 44 entiers p tels que $2 \leqslant p \leqslant 45$ peuvent être regroupés deux par deux sous la forme $p \times inv(p) \equiv 1$ (47). Il reste

$$1 \times 2 \times \ldots \times 45 \times 46 \equiv 1 \times \underbrace{1 \times \ldots \times 1}_{22} \times (-1) \quad (47)$$

ou encore

$$\boxed{46! \equiv -1 \ (47).}$$

