BACCALAUREAT GENERAL

Session d'avril 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Pondichéry

EXERCICE 1

Partie A

1) a. Soit x un réel non nul.

$$f(x) = xe^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

b. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $x \in [0, +\infty[$

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \times (-2xe^{-x^2}) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x^2} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe du trinôme $1 - 2x^2 = -2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ et s'annule en $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, f est croissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ et donc f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce maximum est égal à

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

2) Soit $a \in [0, +\infty[$. La fonction f est continue et positive sur $[0, a]$. Donc l'aire du domaine considéré exprimée en unités d'aire est

$$F(a) = \int_0^a xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a,\ F(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}.}$$

$\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-a^2} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{a \to +\infty} F(a) = \frac{1}{2}.}$$

Partie B

1. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Par suite, $[n, n+1] \subset \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

D'après la question A.1.b., la fonction f est décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ et donc sur $[n, n+1]$. On en déduit que pour tout réel x de l'intervalle $[n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\ dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\ dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\ dx,$$

avec $\int_n^{n+1} f(n+1)\ dx = (n+1-n)f(n+1) = f(n+1)$ et $\int_n^{n+1} f(n)\ dx = (n+1-n)f(n) = f(n)$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ f(n+1) \leq u_n \leq f(n).}$$

b. Soit $n \geq 2$. D'après la question a., on a $u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$ et donc pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, $u_{n+1} \leq u_n$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 2} \text{ est décroissante.}}$$

c. Pour tout $n \geq 2$, on a $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$. Mais d'après la question A.1.a., $\lim_{n \to +\infty} f(n+1) = \lim_{n \to +\infty} f(n) = 0$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

2. a. Soit n un entier strictement positif. D'après la relation de Chasles,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^2 f(x)\ dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\ dx = \int_0^n f(x)\ dx = F(n).$$

b. • On a vu à la question A.2. que pour tout entier naturel n, $F(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n^2}$ et que $\lim_{n \to +\infty} F(n) = \frac{1}{2}$. Les valeurs fournies par le tableur semblent confirmer ce dernier résultat et semblent montrer que la convergence vers $\frac{1}{2}$ est très rapide.

• Les valeurs fournies par le tableur sont comme toujours des valeurs approchées et par exemple, les valeurs exactes de $F(5)$, $F(6)$ et $F(7)$ ne sont en aucun cas $0,5$.

EXERCICE 2

1. De manière générale, si A, B, A' et B' sont quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.
Ici, $O \neq A$ et $A \neq B$. Donc il existe une similitude directe s telle que $s(O) = A$ et $s(A) = B$.

2. Soient a et b deux nombres complexes, $a \neq 0$, et s la similitude d'expression complexe $z' = az + b$.
$s(O) = A \Leftrightarrow b = z_A \Leftrightarrow b = i$ puis

$$s(A) = B \Leftrightarrow\Leftrightarrow az_A + i = z_B \Leftrightarrow ia + i = 1 + 2i \Leftrightarrow a = \frac{1+i}{i} \Leftrightarrow a = -i + 1.$$

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } s \text{ est } z' = (1-i)z + i.}$$

Déterminons les éléments caractéristiques de s. Son centre est son point invariant. Soit ω un nombre complexe.

$$(1-i)\omega + i = \omega \Leftrightarrow i\omega = i \Leftrightarrow \omega = 1.$$

Donc s est une similitude de centre $\Omega(1, 0)$.

Le rapport k et l'angle θ de s sont le module et un argument de $1 - i$. Or

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Donc s est une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

$$\boxed{s \text{ est la similitude de centre } \Omega(1,0)\text{, de rapport } \sqrt{2} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{4}.}$$

3. a. 1ère solution. Soit n un entier naturel.

$$z_{n+1} - 1 = (1-i)z_n + i - 1 = (1-i)(z_n - 1)$$

Ainsi, la suite $(z_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1 - i$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$z_n - 1 = (1-i)^n(z_0 - 1) = -(1-i)^n,$$

et donc

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ z_n = 1 - (1-i)^n.}$$

2ème solution. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1-i)^n$.
• Pour $n = 0$, $1 - (1-i)^n = 1 - (1-i)^0 = 1 - 1 = 0 = z_0$ et l'égalité est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geq 0$. Supposons que $z_n = 1 - (1-i)^n$. Alors

$$z_{n+1} = (1-i)z_n + i = (1-i)(1-(1-i)^n) + i = 1 - i - (1-i)^{n+1} + i = 1 - (1-i)^{n+1}.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1-i)^n$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = z_{A_n} - \omega = z_n - 1 = -(1-i)^n,$$

et

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}} &= z_{n+1} - z_n = (1-(1-i)^{n+1}) - (1-(1-i)^n) = (1-i)^n - (1-i)^{n+1} = (1-(1-i))(1-i)^n = i(1-i)^n \\ &= -iz_{\overrightarrow{\Omega A_n}}. \end{aligned}$$

En particulier, $A_nA_{n+1} = |z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}}| = |-iz_{\overrightarrow{\Omega A_n}}| = |-i| \times |z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}| = 1 \times \Omega A_n = \Omega A_n$ puis

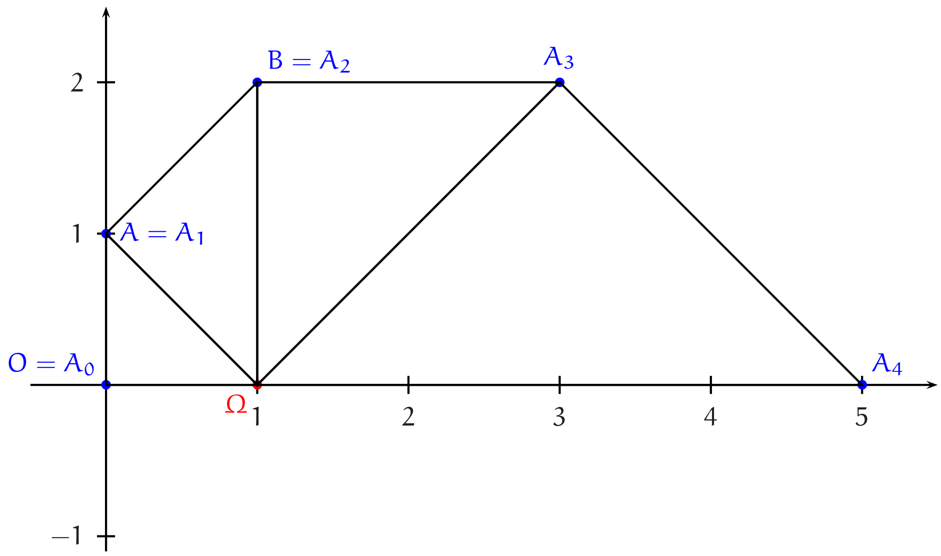
$$\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_nA_{n+1} = \Omega A_n \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = -\frac{\pi}{2}.}$$

c. On en déduit encore que $\left(\overrightarrow{A_n\Omega}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ le triangle } A_n\Omega A_{n+1} \text{ est isocèle rectangle en } A_n, \text{ direct.}}$$

Ceci constitue un procédé de construction de A_{n+1} connaissant A_n.



4. Soit n un entier naturel. Les points Ω et A_n d'une part, Ω et B d'autre part, sont distincts. Donc

$$\begin{aligned} A_n \in (\Omega B) &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ et } \overrightarrow{\Omega A_n} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}\right) = 0\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{1-(1-i)^n-1}{1+2i-1}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{-(1-i)^n}{2i}\right) = 0\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{(1-i)^n}{i}\right) = 0\ [\pi]. \end{aligned}$$

Maintenant, on a vu à la question 2. qu'un argument de $1-i$ est $-\frac{\pi}{4}$ et donc

$$\arg\left(\frac{(1-i)^n}{i}\right) = n\arg(1-i) - \arg(i) = -\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{(n+2)\pi}{4}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} A_n \in (\Omega B) &\Leftrightarrow -\frac{(n+2)\pi}{4} = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{(n+2)\pi}{4} = 0\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{(n+2)\pi}{4} = k\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 4k-2 \end{aligned}$$

De plus, $n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow k \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Les points } A_n \text{ situés sur la droite } (\Omega B) \text{ sont les points } A_{4k-2},\ k \in \mathbb{N}^*.}$$

EXERCICE 3

Proposition 1.	**Faux**
Proposition 2.	**Faux**
Proposition 3.	**Faux**
Proposition 4.	**Vrai**

Justifications.

Proposition 1. L'ensemble considéré $\mathscr{E}$ contient les points $E(0,4,0)$, $F(0,4,1)$ et $G(-2,0,0)$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}(0,0,1)$ et $\overrightarrow{EG}(-2,-4,0)$ ne sont pas colinéaires ou encore les points E, F et G ne sont pas alignés. $\mathscr{E}$ n'est pas une droite. On sait d'ailleurs plus précisément que $\mathscr{E}$ est un plan puisque $\mathscr{E}$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. La proposition 1 est donc fausse.

Proposition 2. Soit M un point du plan. Puisque $1+1+2=4\neq 0$, G est bien défini.
On sait alors que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et donc

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=4\overrightarrow{MG}\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=4\overrightarrow{MG}\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'}=3\overrightarrow{MG}\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'}=-3\overrightarrow{GM}.$$

La transformation considérée est l'homothétie de centre G et de rapport -3. La proposition 2 est donc fausse.

Proposition 3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1,-1,3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-1,-3,5)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C définissent un unique plan.
Cherchons alors un vecteur normal au plan (ABC). Posons $\overrightarrow{n}(a,b,c)$.

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a-b+3c=0\\ -a-3b+5c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=b-3c\\ -(b-3c)-3b+5c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b=2c\\ a=-c\end{array}\right.$$

On peut prendre $\overrightarrow{n}(-1,2,1)$.

Maintenant, les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si le point D appartient au plan ABC ce qui équivaut encore à $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{n}=0$. Or

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{n}=(1-1)\times(-1)+(-5-1)\times 2+(5-0)\times 1=-12+5=-7\neq 0.$$

Donc, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires et la proposition 3 est fausse.

Proposition 4. Calculons la distance d du point $\Omega(3,3,0)$ au plan (P) d'équation $2x+2y+z+3=0$. On sait que

$$d=\frac{|2\times 3+2\times 3+0+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{15}{3}=5.$$

d est égal au rayon de la sphère et on sait alors que la sphère est tangente au plan (P). La proposition 4 est vraie.

EXERCICE 4

1. a. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
• 3 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
• chaque expérience a deux issues : « le nombre obtenu est 6 » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{6}$ ou « le nombre obtenu n'est pas 6 » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{5}{6}$.
La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{6}$. On en déduit la loi de probabilité de X

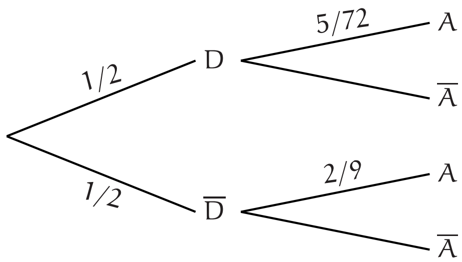
b. On sait que $E(X) = np = 3 \times \dfrac{1}{6} = 0,5$.

$$\boxed{E(X) = 0,5.}$$

c. $p(X = 2) = \dbinom{3}{2} p^2 (1 - p)^1 = 3 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{72}$.

$$\boxed{p(X = 2) = \frac{5}{72}.}$$

2) a. De même, si on choisit le dé truqué, la probabilité d'obtenir deux 6 en trois lancers est $\dbinom{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$.
Ainsi, $p_{\overline{D}}(A) = \dfrac{2}{9}$ et aussi, d'après la question 1., $p_D(A) = \dfrac{5}{72}$.
Représentons la situation par un arbre.



On a alors $p(D \cap A) = p(D) \times p_D(A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{72} = \dfrac{5}{144}$ et $p(\overline{D} \cap A) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{9}$.

$$\boxed{p(D \cap A) = \frac{5}{144} \text{ et } p(\overline{D} \cap A) = \frac{1}{9}.}$$

b. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(A) = p(D \cap A) + p(\overline{D} \cap A) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}.$$

$$\boxed{p(A) = \frac{7}{48}.}$$

c. La probabilité demandée est $p_A(\overline{D})$. Or

$$p_A(\overline{D}) = \frac{p(A \cap \overline{D})}{p(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{1}{9} \times \frac{48}{7} = \frac{16}{3 \times 7} = \frac{16}{21}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'avoir choisi le dé truqué est } \frac{16}{21}.}$$

3. a. B_n est l'événement contraire de l'événement « n'obtenir aucun 6 en n lancers ».
Si le dé choisi est le dé bien équilibré, la probabilité de n'obtenir aucun 6 en n lancers est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et si le dé choisi est le dé truqué, la probabilité de n'obtenir aucun 6 en n lancers est $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Donc, comme à la question 2.b., la probabilité de n'obtenir aucun 6 en n lancers est $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ puis

$$\boxed{p_n = 1 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).}$$

b. Puisque $-1 < \frac{5}{6} < 1$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 1.}$$

Ceci signifie que si on lance le dé un grand nombre de fois, on est quasiment sûr d'obtenir au moins une fois un 6.

