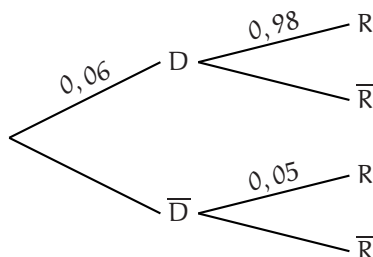


EXERCICE 1

1) Représentons la situation par un arbre.



2) a) La probabilité demandée est $p(D \cap \bar{R})$. Or

$$p(D \cap \bar{R}) = p(D) \times p_D(\bar{R}) = p(D) \times (1 - p_D(R)) = 0,06 \times 0,02 = 0,0012.$$

La probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté est 0,0012.

b) La probabilité demandée est $p(R \cap \bar{D}) + p(\bar{R} \cap D)$. On a déjà $p(\bar{R} \cap D) = 0,0012$. Il manque

$$p(R \cap \bar{D}) = p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(R) = (1 - p(D)) \times p_{\bar{D}}(R) = 0,94 \times 0,05 = 0,047,$$

et donc $p(R \cap \bar{D}) + p(\bar{R} \cap D) = 0,047 + 0,0012 = 0,0482$.

La probabilité qu'il y ait erreur de contrôle est 0,0482.

3) La probabilité demandée est $p(\bar{R})$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(\bar{R}) = p(\bar{R} \cap D) + p(\bar{R} \cap \bar{D}) = 0,0012 + p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(\bar{R}) = 0,0012 + 0,94 \times (1 - 0,05) = 0,8942.$$

La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est 0,8942.

4) a) Notons X le nombre de succès au cours des quatre contrôles. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le lecteur n'est pas rejeté » avec une probabilité $p = 0,8942$ (d'après 3)) ou « le lecteur est rejeté » avec une probabilité $1 - p = 0,1058$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8942$.

La variable aléatoire G prend 3 valeurs : $120 - 50 = 70$ euros, $60 - 50 = 10$ euros et -50 euros.

- $p(G = 70) = p(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,8942^4 \times 0,1058^0 = 0,8942^4 = 0,64$ à 10^{-2} près.
- $p(G = 10) = p(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,8942^3 \times 0,1058^1 = 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 = 0,30$ à 10^{-2} près.
- $p(G = -50) = 1 - p(G = 70) - p(G = 10) = 1 - 0,8942^4 - 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 = 0,06$ à 10^{-2} près.

Récapitulons ces résultats dans un tableau.

g_i	70	10	-50
$p(G = g_i)$	0,64	0,30	0,06

b) $E(G) = 70 \times p(G = 70) + 10 \times p(G = 10) - 50 \times p(G = -50)$ et donc

$$\begin{aligned} E(G) &= 70 \times 0,8942^4 + 10 \times 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 - 50 \times (1 - 0,8942^4 - 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058) \\ &= 44,88 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

Ceci signifie que chaque lecteur rapportera en moyenne 44,88 euros.

EXERCICE 2

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

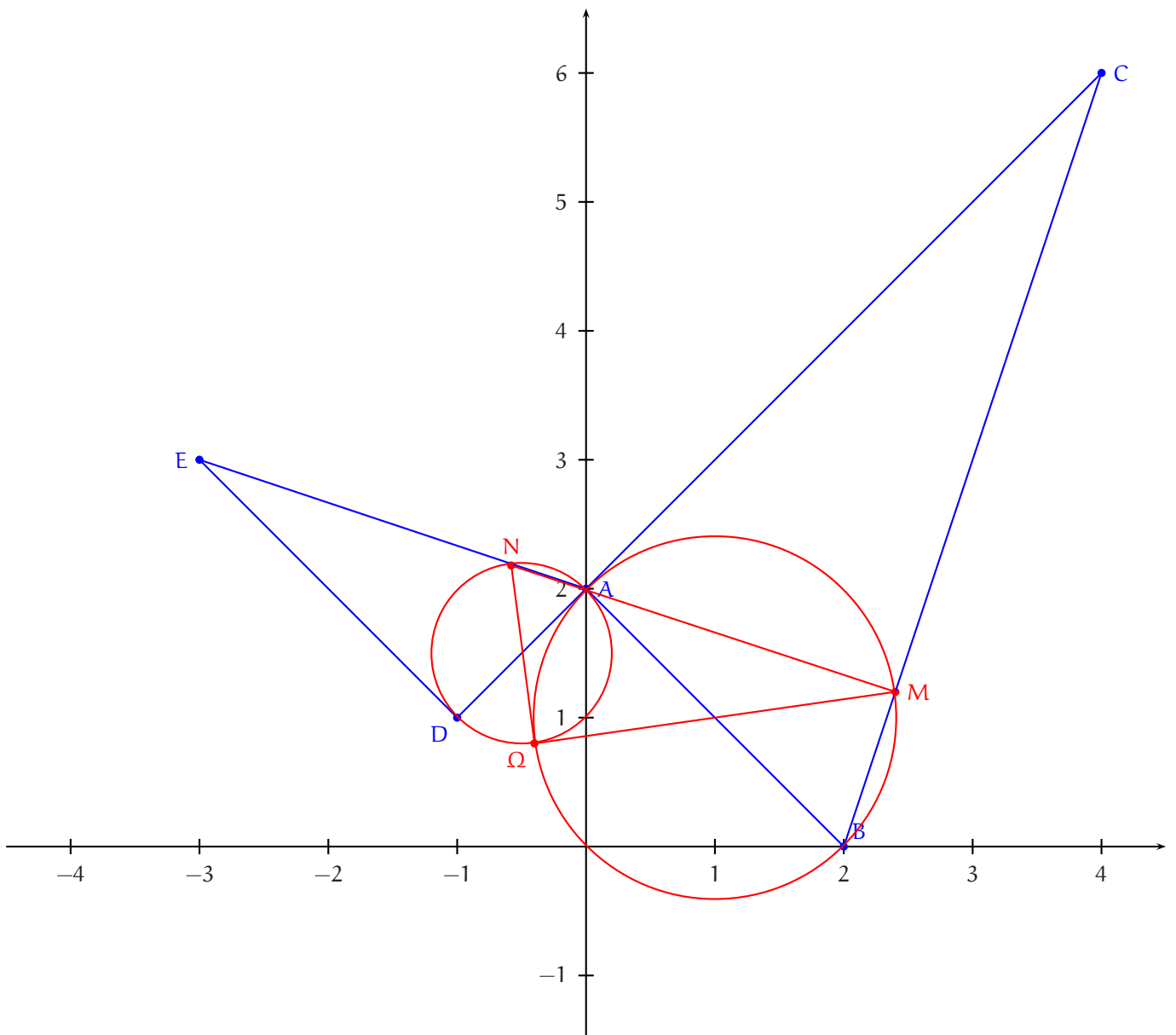
1) Soient a et b deux nombres complexes, a étant non nul, puis s la similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} s(A) = A' \\ s(B) = B' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_{A'} - az_A \\ az_B + (z_{A'} - az_A) = z_{B'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_{A'} - az_A \\ a(z_B - z_A) = z_{B'} - z_{A'} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \quad (\text{car } z_B - z_A \neq 0) \\ b = z_{A'} - az_A \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \\ b = z_{A'} - \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} z_A \end{cases} . \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un couple (a, b) de complexes et un seul, solution du problème. De plus, $a \neq 0$ car $z_{B'} - z_{A'} \neq 0$. Finalement il existe une similitude directe s et une seule telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

PARTIE B

1)



2) Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ont pour coordonnées respectives $(2, -2)$ et $(4, 4)$ et donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 4 + (-2) \times 4 = 0$. Donc

le triangle ABC est rectangle en A.

3) a) Puisque $A \neq B$ et $D \neq A$, il existe une similitude directe et une seule f telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$. Notons $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, l'écriture complexe de f .

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(A) = D \\ f(B) = A \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ia + b = -1 + i \\ 2a + b = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2ia - 1 + i \\ 2a + (-2ia - 1 + i) = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2ia - 1 + i \\ 2(1-i)a = 1 + i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1+i}{2(1-i)} \\ b = -2ia - 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{(1+i)^2}{2(1-i)(1+i)} \\ b = -2ia - 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1+2i-1}{2(1^2+1^2)} \\ b = -2ia - 1 + i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{i}{2} \\ b = -2i \times \frac{i}{2} - 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}i \\ b = i \end{cases}. \end{aligned}$$

L'écriture complexe de f est $z' = \frac{1}{2}iz + i$.

b) • $a = \frac{i}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{1}{2}e^{i\pi/2}$. Donc f est une similitude de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 • Le centre de f est son point invariant. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z .

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow \frac{i}{2}z + i = z \Leftrightarrow \left(-1 + \frac{i}{2}\right)z = -i \Leftrightarrow z = \frac{-i}{-1 + \frac{i}{2}} \Leftrightarrow z = \frac{-i \left(-1 - \frac{i}{2}\right)}{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow z = \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{2} + i\right) \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i. \end{aligned}$$

f est la similitude directe de centre $\Omega \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) On a déjà $f(A) = D$ et $f(B) = A$. Déterminons $f(C)$.

$$z_{f(C)} = \frac{i}{2}(4 + 6i) + i = 2i - 3 + i = -3 + 3i = z_E.$$

Donc, $f(C) = E$. Ainsi, l'image par f du triangle ABC est le triangle $f(A)f(B)f(C)$ c'est-à-dire le triangle DAE .

L'image par f du triangle ABC est le triangle DAE .

d) L'image par une similitude directe d'un triangle rectangle en A est un triangle rectangle en $f(A)$ et donc

le triangle DAE est rectangle en D .

4) a) L'image par la similitude directe f du cercle (Γ_1) est le cercle de diamètre $[f(A)f(B)] = [DA]$ c'est-à-dire le cercle (Γ_2) . L'image par la similitude directe f de la droite (BC) est la droite $(f(B)f(C)) = (AE)$. Le point M appartient à (Γ_1) et à (BC) et donc le point $f(M)$ appartient à (Γ_2) et à (AE) . Ainsi, le point $f(M)$ est soit le point A , soit le point N . De plus, M n'est pas le point B et donc $f(M)$ n'est pas le point A . Finalement

$$f(M) = N.$$

b) L'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N})$ est l'angle de la similitude f c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ et donc

le triangle ΩMN est rectangle en Ω .

c) En notant k le rapport de la similitude f , $\frac{NA}{MB} = \frac{f(M)f(B)}{MB} = k$ et $\frac{NE}{MC} = \frac{f(M)f(C)}{MC} = k$. Donc $\frac{NA}{MB} = \frac{NE}{MC}$ ou encore

$$MB \times NE = MC \times NA.$$

EXERCICE 3

1) a) Puisque $2 - 1 + 1 = 2 \neq 0$, le barycentre du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$ est bien défini. De plus, \vec{EA} a pour coordonnées $(-3, 5, 1)$, \vec{EB} a pour coordonnées $(-4, 9, -1)$ et \vec{EC} a pour coordonnées $(2, -1, -3)$. On en déduit que le vecteur $2\vec{EA} - \vec{EB} + \vec{EC}$ a pour coordonnées $(2 \times (-3) + 4 + 2, 2 \times 5 - 9 - 1, 2 \times 1 + 1 - 3)$ ou encore $(0, 0, 0)$. Ainsi, $2\vec{EA} - \vec{EB} + \vec{EC} = \vec{0}$ et donc

$$E = \text{bar}\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}.$$

b) Soit M un point de l'espace. On sait que $2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = (2 - 1 + 1)\vec{ME} = 2\vec{ME}$. Par suite,

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 2\sqrt{21} \Leftrightarrow \|2\vec{ME}\| = 2\sqrt{21} \Leftrightarrow 2ME = 2\sqrt{21} \Leftrightarrow ME = \sqrt{21}.$$

Γ est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{21}$.

2) a) Le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées $(-1, 4, -2)$ et le vecteur \vec{AD} a pour coordonnées $(1, 2, 0)$. S'il existe un réel k tel que $\vec{AD} = k\vec{AB}$ on a nécessairement $-k = 1$ et aussi $4k = 2$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et D ne sont pas alignés.

Les points A, B et D définissent un plan.

b) Le vecteur \vec{EC} a pour coordonnées $(2, -1, -3)$. Or

$$\vec{AB} \cdot \vec{EC} = (-1) \times 2 + 4 \times (-1) + (-2) \times (-3) = -2 - 4 + 6 = 0$$

et

$$\vec{AD} \cdot \vec{EC} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 0 \times (-3) = 2 - 2 + 0 = 0.$$

La droite (EC) est donc orthogonale aux droites (AB) et (AD) . Puisque la droite (EC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABD) ,

la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD) .

c) Le plan (ABD) est le plan passant par $A(1, -1, 3)$ et de vecteur normal $\vec{EC}(2, -1, -3)$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (ABD) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{EC} = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) - (y + 1) - 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3z + 6 = 0.$$

Une équation cartésienne du plan (ABD) est $2x - y - 3z + 6 = 0$.

3) a) La droite (EC) est la droite passant par $E(4, -6, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{EC}(2, -1, -3)$. Donc

$$\text{un système d'équations paramétriques de la droite } (EC) \text{ est } \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -6 - k \\ z = 2 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $M(4 + 2k, -6 - k, 2 - 3k)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EC) .

$$M \in (ABD) \Leftrightarrow 2(4 + 2k) - (-6 - k) - 3(2 - 3k) + 6 = 0 \Leftrightarrow 14k + 14 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Quand $k = -1$, on obtient les coordonnées du point F :

$$F(2, -5, 5).$$

4) On a vu à la question 1)b) que Γ est la sphère de centre E et de rayon $R = \sqrt{21}$. La distance d du centre E de Γ au plan (ABD) est la distance de E à son projeté orthogonal sur ce plan c'est-à-dire la distance EF . Or

$$EF = \sqrt{(2-4)^2 + (-5+6)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}.$$

Puisque $d < R$, on sait que l'intersection de la sphère Γ et du plan (ABD) est un cercle. Son centre est le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABD) : c'est le point $F(2, -5, 5)$.

Enfin, si on note r le rayon du cercle, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire $R^2 = r^2 + d^2$ et donc

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{21 - 14} = \sqrt{7}.$$

L'intersection de Γ et (ABD) est un cercle de centre $F(2, -5, 5)$ et de rayon $\sqrt{7}$.

EXERCICE 4

Partie A

1) Puisque la fonction f' est continue sur $[0, 1]$, $\int_0^1 f'(t) dt$ existe et

$$\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}.$$

2) Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0, 1]$, $\int_0^1 f(x) dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe (C). Ce domaine contient le triangle OAB où B a pour coordonnées $(1, 0)$. L'aire de ce rectangle est égale à $\frac{1 \times 1}{2}$ ou encore $\frac{1}{2}$ et donc $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{2}$.

Partie B

1) Pour tout réel non nul x , on a $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \times e^{-x} = \frac{x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times e^{-x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times e^{-x}$.

Ensuite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$ et d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que la droite (Ox) est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

2) La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que polynôme et est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de trois fonctions strictement croissantes sur $[0, +\infty[$, à savoir les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x - 1$. Puisque la fonction g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on sait que pour tout réel k élément de $[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[= [-1, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, puisque $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note α cette solution. Puisque $g(0) = -1 \neq 0$, on a plus précisément $\alpha \in]0, +\infty[$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geq 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(e^{-x} + x(-e^{-x}))(x^2+1) - xe^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{-x}((1-x)(x^2+1) - 2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{(-x^3 - x^2 - x + 1)e^{-x}}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{g(x)e^{-x}}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout réel positif x , $-\frac{e^{-x}}{(x^2+1)^2} < 0$ et donc pour tout réel positif x , $f'(x)$ a le signe contraire de $g(x)$.

b) La fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et s'annule en α . Donc, si $0 \leq x < \alpha$, on a $g(x) < g(\alpha)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, on a $g(x) > g(\alpha)$ ou encore $g(x) > 0$.

Puisque les fonctions f' et g sont de signes contraires sur $[0, +\infty[$, on en déduit le tableau de variations de f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$f(\alpha)$ 		

4) a) Soit $x \geq 0$. On a déjà $\frac{x}{x^2+1} \geq 0$ et d'autre part

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{2(x^2+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geq 0,$$

et donc $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0, +\infty[, 0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

b) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[n, 2n]$ on a $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$ et donc, puisque pour tout réel x de $[n, 2n]$, $e^{-x} > 0$, on en déduit que

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [n, 2n], 0 \leq \frac{xe^{-x}}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale, on obtient alors $0 \leq \int_n^{2n} f(x) dx \leq \int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x} dx$ avec

$$\int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x} \right]_n^{2n} = \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}).$$

On a montré que

$$\text{pour tout entier naturel } n, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}).$$

c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$. De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 0$. On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}) = 0$. Mais alors, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$