

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

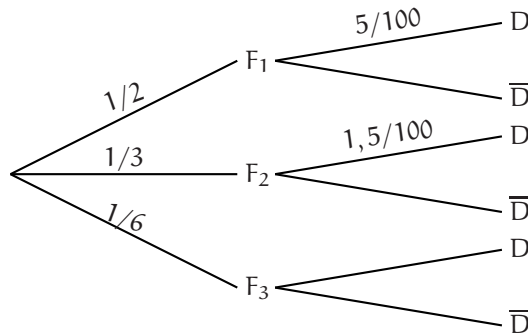
Asie

EXERCICE 1

1) a) L'énoncé donne $p(F_1) = \frac{1}{2}$, $p(F_2) = \frac{1}{3}$ et $p(F_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

D'autre part, $p_{F_1}(D) = \frac{5}{100}$, $p_{F_2}(D) = \frac{1,5}{100}$ et $p(D) = \frac{3,5}{100}$.

Traduisons alors la situation par un arbre.



b) La probabilité demandée est $p(F_1 \cap D)$.

$$p(F_1 \cap D) = p(F_1) \times p_{F_1}(D) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{100} = \frac{2,5}{100}.$$

$$p(F_1 \cap D) = 0,025.$$

c)

$$p(F_2 \cap D) = p(F_2) \times p_{F_2}(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1,5}{100} = \frac{0,5}{100}.$$

$$p(F_2 \cap D) = 0,005.$$

d) D'après la formule des probabilités totales, $p(F_1 \cap D) + p(F_2 \cap D) + p(F_3 \cap D) = p(D)$ et donc

$$p(F_3 \cap D) = p(D) - p(F_1 \cap D) - p(F_2 \cap D) = 0,035 - 0,025 - 0,005 = 0,005.$$

$$p(F_3 \cap D) = 0,005.$$

e) La probabilité demandée est $p_{F_3}(D)$.

$$p_{F_3}(D) = \frac{p(F_3 \cap D)}{p(F_3)} = \frac{0,005}{1/6} = 0,03.$$

$$p_{F_3}(D) = 0,03.$$

2) a) Notons X le nombre de paires de chaussettes qui présentent un défaut. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 6 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la chaussette présente un défaut » avec une probabilité $p = \frac{3,5}{100}$ et « la chaussette ne présente pas de défaut » avec une probabilité $1 - p = \frac{96,5}{100}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{3,5}{100}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{3,5}{100}\right)^2 \left(\frac{96,5}{100}\right)^4 = 0,016 \text{ arrondi au millième.}$$

b) La probabilité demandée est $p(X \leq 1)$ et on a

$$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = \left(\frac{96,5}{100}\right)^6 + \binom{6}{1} \times 0,035^1 \times 0,965^5 = 0,983 \text{ arrondi au millième.}$$

EXERCICE 2

1) a) D'une part, $239 - 5 = 234 = 13 \times 18$ et donc $239 \equiv 5 \pmod{13}$. D'autre part, $239 - 1 = 238 = 17 \times 14$ et donc $239 \equiv 1 \pmod{17}$.

L'entier 239 est solution du système.

b) Soit N un entier relatif. Si N est solution du système, il existe deux entiers relatifs x et y tels que $N = 1 + 17x$ et $N = 5 + 13y$. Les entiers x et y doivent vérifier $1 + 17x = 5 + 13y$ et donc $17x - 13y = 4$.

c) Le couple $(x_0, y_0) = (1, 1)$ est une solution de l'équation $17x - 13y = 4$. Soient x et y deux entiers relatifs.

$$17x - 13y = 4 \Rightarrow 17x - 13y = 17x_0 - 13y_0 \Rightarrow 17(x - x_0) = 13(y - y_0).$$

Ainsi, si x et y sont solutions, nécessairement l'entier 13 divise l'entier $17(x - x_0)$. Comme les entiers 13 et 17 sont premiers entre eux (puisque 13 et 17 sont deux nombres premiers distincts), le théorème de GAUSS permet d'affirmer que 13 divise $x - x_0$ et donc il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 13k$ ou encore tel que $x = x_0 + 13k$.

De même, 17 divise $13(y - y_0)$ et donc il existe un entier relatif l tel que $y - y_0 = 17l$ ou encore tel que $y = y_0 + 17l$.

Réciproquement, soient k et l deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 13k$ et $y = y_0 + 17l$.

$$17x - 13y = 17(x_0 + 13k) - 13(y_0 + 17l) = 17x_0 - 13y_0 + 13 \times 17(k - l) = 4 + 13 \times 17(k - l),$$

et donc le couple (x, y) est solution si et seulement si $k = l$.

Les couples solutions sont les couples de la forme $(1 + 13k, 1 + 17k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

d) D'après b) et c), il existe un entier relatif k tel que $N = 1 + 17(1 + 13k) = 18 + 221k$.

e) Les questions b), c) et d) montrent que si N est solution du système alors $N \equiv 18 \pmod{221}$.

Réciproquement, si $N \equiv 18 \pmod{221}$ alors il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$. Par suite

- $N - 5 = 13 + 221k = 13(1 + 17k)$ et donc $N \equiv 5 \pmod{13}$,
- $N - 1 = 17 + 221k = 17(1 + 13k)$ et donc $N \equiv 1 \pmod{17}$

et N est solution du système.

$$\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases} \Leftrightarrow N \equiv 18 \pmod{221}.$$

2) (**Remarque.** L'énoncé sous-entend sûrement que k et l doivent être non nuls.)

a) 17 est un nombre premier et 10 n'est pas divisible par 17. D'après le petit théorème de FERMAT, $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

$$10^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

b) Soit ℓ un entier naturel non nul. D'après la question 1)e), $10^\ell \equiv 18 \pmod{221}$ équivaut à $10^\ell \equiv 5 \pmod{13}$ et $10^\ell \equiv 1 \pmod{17}$. Décrivons les puissances de 10 modulo 13.

$10^1 = 10$ est congru à 10 modulo 13

Puisque 10 est congru à -3 , 10^2 est congru à $-3 \times 10 = -30$ ou encore à 9 ou à -4

$10^3 = 10^2 \times 10$ est congru à $-4 \times 10 = -40$ ou encore à -1

$10^4 = 10^3 \times 10$ est congru à -10 ou encore à 3

$10^5 = 10^4 \times 10$ est congru à $3 \times 10 = 30$ ou encore à 4

$10^6 = 10^5 \times 10$ est congru à 40 ou encore à 1.

A partir d'ici, le cycle recommence. $10^7, 10^8, 10^9 \dots$ sont congrus à 10 puis -4 puis $-1 \dots$

Mais alors pour tout entier naturel non nul ℓ , $10^\ell \not\equiv 5 \pmod{13}$. D'après la remarque du début de la question, on en déduit que

pour tout entier naturel non nul ℓ , $10^\ell \not\equiv 18 \pmod{221}$.

EXERCICE 3

PARTIE A Existence et unicité de la solution

1) La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$.

La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2) D'autre part, la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$. Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $] \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Finalement, pour tout réel k de $] -\infty, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$ et en particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,1 \dots \leq 0$ et $f(1) = 1 + \ln 1 = 1 \geq 0$. Donc, $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(0) \leq f(1)$ et puisque la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1.$$

PARTIE B Encadrement de la solution α

1) Etude de quelques propriétés de la fonction g

a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{5} \left(4 - \frac{1}{x} \right) = \frac{4x - 1}{5x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $5x > 0$ et donc $g'(x)$ est du signe de $4x - 1$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{4}[$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$.

b) Puisque $[\frac{1}{2}, 1] \subset [\frac{1}{4}, +\infty[$, la fonction g est croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Par suite, pour tout réel x de $[\frac{1}{2}, 1]$, on a $g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(x) \leq g(1)$.

La calculatrice fournit $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0,538 \geq \frac{1}{2}$ et $g(1) = 0,8 \leq 1$. Donc, pour tout réel x de $[\frac{1}{2}, 1]$, on a $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 1$ ou encore, pour tout réel x de $[\frac{1}{2}, 1]$, $g(x)$ appartient à $[\frac{1}{2}, 1]$.

c) Soit x un réel de $]0, +\infty[$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{4x - \ln(x)}{5} = x \Leftrightarrow 4x - \ln(x) = 5x \Leftrightarrow 5x - 4x + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \text{ solution de (E)}.$$

Donc, un nombre x de $]0, +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

• Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = \frac{1}{2}$ et donc d'après la question B-1)b), $\frac{1}{2} \leq g(u_0) \leq 1$ ou encore $u_0 \leq u_1 \leq 1$. Ainsi, $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Puisque la fonction g est croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ d'après la question B-1)a), on en déduit que $g(u_n) \leq g(u_{n+1})$ ou encore $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

D'autre part, d'après la question B-1)b), puisque u_n et u_{n+1} sont deux réels de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, il en est de même de u_{n+1} et $u_{n+2} = g(u_{n+1})$. Ceci montre que $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n, \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

b) D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ élément de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Puisque la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et en particulier en ℓ , on en déduit que

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = g(\ell).$$

Ainsi, le réel ℓ est un réel strictement positif solution de l'équation $g(x) = x$. D'après la question B-1)c), ℓ est encore solution de (E) et donc $\ell = \alpha$ car α est l'unique solution strictement positive de l'équation (E) d'après la question A-2).

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

3) Recherche d'une valeur approchée de α

a) La calculatrice fournit

n	u_n
0	0,5
1	0,5386294...
2	0,5546490...
3	0,5616031...
4	0,5646744...
5	0,5660407...
6	0,5666504...
7	0,5669228...
8	0,5670447...
9	0,5670991...
10	0,56712356...

et donc

$$u_{10} = 0,567124 \text{ arrondi à la sixième décimale.}$$

b) $u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 0,0005$. Mais $u_{10} \geq 0,567$ et $u_{10} + 0,0005 \leq 0,56712356... + 0,0005 = 0,56762356... \leq 0,568$. Donc

$$0,567 \leq \alpha \leq 0,568.$$

EXERCICE 4

- 1) Réponse (1)
- 2) Réponse (3)
- 3) Réponse (3)
- 4) Réponse (2)

Justifications.

1) Soient a et b deux réels, a étant non nul. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

Ici, $a = -2$ et $b = 6$ et donc les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-2x} + 3$ ce qui élimine les réponses (2) et (3). De plus, la condition $f(0) = 1$ équivaut à $C + 3 = 1$ ou encore $C = -2$. Ainsi, pour tout réel x , $f(x) = -2e^{-2x} + 3$ ce qui confirme que la réponse (1) est exacte.

2) I est le barycentre du système $\{(B; 2); (C; 1)\}$. Le théorème du barycentre partiel permet d'affirmer que $\text{bar}\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\} = \text{bar}\{(A; 1); (I; 3)\}$. Ainsi, le barycentre du système $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$ est sur la droite (AI) et la bonne réponse est la réponse (3).

3) $x_{H_1} - 3y_{H_1} + 2z_{H_1} = 3 + 3 + 8 = 14 \neq 5$. Le point H_1 n'appartient pas à \mathcal{P} et la réponse (1) est fausse.
 $x_{H_2} - 3y_{H_2} + 2z_{H_2} = 4 + 9 - 8 = 5$ et $x_{H_3} - 3y_{H_3} + 2z_{H_3} = 3 + 2 = 5$. Les points H_2 et H_3 appartiennent au plan \mathcal{P} .

Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1, -3, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH_2}$ a pour coordonnées $(2, -6, -3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AH_3}$ a pour coordonnées $(1, -3, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH_3}$ est colinéaire au vecteur \vec{n} et donc le projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} est le point H_3 .

4) La valeur moyenne considérée est $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Puisque f est une fonction positive sur $[0, 1]$, I est un nombre positif et la réponse (1) est fausse. Ensuite, pour tout réel x de $[0, 1]$, $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ et donc d'après l'inégalité de la moyenne, $I \leq \int_0^1 1 dx \leq 1 \times (1 - 0) = 1$. Comme $\frac{\pi}{2} > 1$, la réponse (3) est fausse. La bonne réponse est donc nécessairement la réponse (2).

On ne sait calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ qu'au cours de la première année d'études supérieures.