BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Rochambeau

EXERCICE 1

Partie A : Etude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours.

1) Puisque la fonction y est dérivable sur l'intervalle $[0, 30]$ et strictement positive, la fonction z est dérivable sur l'intervalle $[0, 30]$. Ensuite,

$$y(0) = 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{z(0)} = 0,01 \Leftrightarrow z(0) = \frac{1}{0,01} \Leftrightarrow z(0) = 100.$$

D'autre part,

$$y' = 0,05y(10 - y) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}\right)' = 0,05 \times \frac{1}{z}\left(10 - \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{0,5}{z} - \frac{0,05}{z^2} \Leftrightarrow z' = -z^2\left(\frac{0,5}{z} - \frac{0,05}{z^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow z' = -0,5z + 0,05.$$

Finalement

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10 - y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{array}\right. .}$$

2) a) On sait que les solutions de l'équation différentielle $z' = az + b$, a et b réels donnés tels que $a \neq 0$, sont les fonctions de la forme $z : t \mapsto -\frac{b}{a} + Ke^{at}$ où K est un réel. Ici, $a = -0,5$ et $b = 0,05$ et donc il existe un réel K tel que pour tout réel t de l'intervalle $[0, 30]$, $z(t) = \frac{0,05}{0,5} + Ke^{-0,5t} = 0,1 + Ke^{-0,5t}$.
La condition $z(0) = 100$ fournit alors $100 = 0,1 + Ke^0$ et donc $K = 99,9$. Ainsi,

$$\text{pour tout réel } t \text{ de } [0, 30],\ z(t) = 99,9e^{-0,5t} + 0,1.$$

La fonction z obtenue est effectivement strictement positive sur l'intervalle $[0, 30]$ et donc

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ de } [0, 30],\ y(t) = \frac{1}{99,9e^{-0,5t} + 0,1}.}$$

b) Le pourcentage de la population infectée après 30 jours est

$$y(30) = \frac{1}{99,9e^{-0,5\times30} + 0,1} = \frac{1}{99,9e^{-15} + 0,1} = 9,9\ldots.$$

$\boxed{\text{Le pourcentage de la population infectée après 30 jours est 10\% arrondi à l'unité.}}$

Partie B : Etude de l'efficacité d'un vaccin.

1) On note V l'événement « l'individu est vacciné » et M l'événement « l'individu tombe malade ». La probabilité demandée est $p(\overline{V} \cap M)$. L'énoncé donne $p(V) = 0,25$, $p_V(\overline{M}) = 0,92$ et $p(M) = 0,1$.

On en déduit $P_V(M) = 1 - p_V(\overline{M}) = 0,08$ puis $p(V \cap M) = p(V) \times p_V(M) = 0,25 \times 0,08 = 0,02$. Enfin, d'après la formule des probabilités totales, $p(V \cap M) + p(\overline{V} \cap M) = p(M)$ et donc

$$p(\overline{V} \cap M) = p(M) - p(V \cap M) = 0,1 - 0,02 = 0,08.$$

La probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est $0,08$.

2) La probabilité demandée est $p_{\overline{V}}(M)$.

$$p_{\overline{V}}(M) = \frac{p(\overline{V} \cap M)}{p(\overline{V})} = \frac{0,08}{1 - 0,25} = \frac{8}{75} = 0,106\ldots.$$

La probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné est $0,11$ arrondi au centième.

EXERCICE 2

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Alors, pour tout réel x de $[a,b]$, $g(x)-f(x) \geqslant 0$ puis par positivité de l'intégrale, $\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \geqslant 0$ et enfin, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. On a ainsi montré que $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

PARTIE B

1) a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, on a $-1 \leqslant -x^2 \leqslant 0$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout réel x de $[0,1]$, $e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^0$ et finalement

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ \frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1.}$$

b) L'inégalité de la moyenne permet alors d'affirmer que $\frac{1}{e} \times (1-0) \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 1 \times (1-0)$ et donc que

$$\boxed{\frac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1.}$$

2) Pour tout réel x de $[0,1]$, $xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}(-2x)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}(e^{-x^2})'$ et donc

$$u_1 = \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).}$$

3) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n f(x) \geqslant 0$. On en déduit que $\int_0^1 x^n f(x)\,dx \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x^2}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}e^{-x^2} - x^n e^{-x^2}\right)\,dx = \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x^2}\,dx.$$

Maintenant, pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n \geqslant 0$, $e^{-x^2} \geqslant 0$ et $(x-1) \leqslant 0$ et donc $x^n(x-1)e^{-x^2} \leqslant 0$. On en déduit par croissance de l'intégrale que $u_{n+1} - u_n \leqslant \int_0^1 0\,dx = 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0,1]$, $e^{-x^2} \leqslant e^0 = 1$ et donc, puisque $x^n \geqslant 0$, pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n e^{-x^2} \leqslant x^n$. On en déduit par croissance de l'intégrale que

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

b) Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

EXERCICE 3

1) Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$ et le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$.
Le point I est le centre du carré $ADHE$ et donc le milieu de la diagonale [DE]. On en déduit que le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_D + x_E}{2}, \dfrac{y_D + y_E}{2}, \dfrac{z_D + z_E}{2}\right)$ ou encore $\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

De même, les points B et D ont pour coordonnées respectives $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Puisque le point J est le milieu du segment [BD], le point J a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Enfin, le point K est le milieu du segment [IJ] et donc le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

$$\boxed{\text{Les points I, J et K ont respectivement pour coordonnées } \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).}$$

2) Le point A a pour coordonnées $(0,0,0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.
Ensuite, puisque $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AG}$, on doit avoir $1 \times k = \dfrac{1}{4}$ et aussi $1 \times k = \dfrac{1}{2}$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points } A, K \text{ et } G \text{ ne sont pas alignés.}}$$

Les points A, K et G définissent donc un unique plan.

3) a) Déjà le milieu K du segment [IJ] est dans le plan (AKG). Il reste à vérifier que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (AKG). Pour cela, vérifions que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ du plan (AKG).

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$ et donc

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 0,$$

et

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 = 0.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{Le plan } (AKG) \text{ est le plan médiateur du segment [IJ].}}$$

b) Le plan (AKG) est le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{IJ}$. Une équation cartésienne du plan (AKG) est donc $\dfrac{1}{2}(x-0) + 0(y-0) - \dfrac{1}{2}(z-0) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan } (AKG) \text{ est } x - z = 0.}$$

c) Le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$ et donc $x_D - z_D = 0$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{le point D appartient au plan } (AKG).}$$

4) a) Les points D et G ont respectivement pour coordonnées $(0,1,0)$ et $(1,1,1)$. Le point L est le milieu du segment $[DG]$ et a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)$. Par suite, le milieu du segment [AL] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$. Le milieu du segment [AL] est donc le point K.

$$\boxed{\text{Le point K est le milieu du segment [AL].}}$$

b) Le point L est le milieu du segment $[DG]$ et donc, d'après le théorème du barycentre partiel, $K = \text{bar}(A(2), L(2)) = \text{bar}(A(2), D(1), G(1))$.

$$\boxed{K = \text{bar}(A(2), L(2)) = \text{bar}(A(2), D(1), G(1)).}$$

EXERCICE 4

Partie A Etude d'un cas particulier

1) a)

$$\frac{-a}{b-a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i-1-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+1^2} = i.$$

$$\boxed{\frac{-a}{b-a} = i.}$$

b) $\dfrac{AO}{AB} = \dfrac{|0-a|}{|b-a|} = \left|\dfrac{-a}{b-a}\right| = |i| = 1$ et donc $AO = AB$. Le triangle OAB est isocèle en A.
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) = \arg\left(\dfrac{-a}{b-a}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Le triangle OAB est rectangle en A.

$$\boxed{\text{Le triangle OAB est rectangle isocèle en } A.}$$

2) L'expression complexe de la rotation r est $z' = e^{2i\pi/3}z$ ou encore $z' = \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Par suite,

$$c = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2} = -2.$$

$$\boxed{c = -2.}$$

3) a) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2-1 \\ y-\sqrt{3} & 0-\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}(x-1)+3(y-\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$$

$$\boxed{\text{Une équation de la droite } (AC) \text{ est } y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).}$$

b) L'affixe du milieu E du segment [BD] est

$$e = \frac{b+d}{2} = \frac{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i-2-2i}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Par suite,

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(x_E+2) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{-3+3\sqrt{3}}{3\times 2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = y_E.$$

$$\boxed{\text{Le milieu du segment [BD] appartient à la droite } (AC).}$$

Partie B Etude du cas général

1) $a' = e^{i\theta}a$ et $b' = e^{i\theta}b$.

2) a) $p = \dfrac{a+a'}{2} = \dfrac{a+e^{i\theta}a}{2} = \dfrac{1+e^{i\theta}}{2}a$ et de même $q = \dfrac{1+e^{i\theta}}{2}b$.

b) $q-p=\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}b-\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}a=\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}(b-a)$. Maintenant, $b-a\neq 0$ puis pour $\theta\in]0,2\pi[$,

$$\frac{1+e^{i\theta}}{2}=0\Leftrightarrow e^{i\theta}=-1\Leftrightarrow\theta=\pi.$$

Ainsi, pour $\theta\neq\pi$, on a $q-p\neq 0$ et

$$\frac{-p}{q-p}=\frac{\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}\times(-a)}{\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}\times(b-a)}=\frac{-a}{b-a}.$$

Pour $\theta=\pi$, on a $P=Q=O$.

c) Pour $\theta\neq\pi$, on a $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PO}\right)=\arg\left(\dfrac{-p}{q-p}\right)=\arg\left(\dfrac{-a}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ d'après la question A.1)a). Donc

$$\boxed{\text{la droite } (OP) \text{ est perpendiculaire à la droite } (PQ).}$$

d) Pour $\theta\neq\pi$, on a $P\neq O$. De plus, puisque le triangle OAA' est isocèle en O et que le point P est le milieu de $[AA']$, la droite (OP) est la médiatrice du segment $[AA']$. En particulier, la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AA') qui est aussi la droite (PA).

D'après la question précédente, la droite (OP) est également perpendiculaire à la droite (PQ). On en déduit que les droites (PA) et (PQ) sont parallèles. Puisque ces droites ont en commun le point P, ces droites sont confondues et donc le point Q appartient à la droite (PA) qui est aussi la droite (AA').

Ce dernier résultat reste vrai quand $\theta=\pi$ car alors $Q=P$ ou encore Q est le milieu du segment $[AA']$.

$$\boxed{\text{Le point } Q \text{ appartient à la droite } (AA').}$$

