EXERCICE 2 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

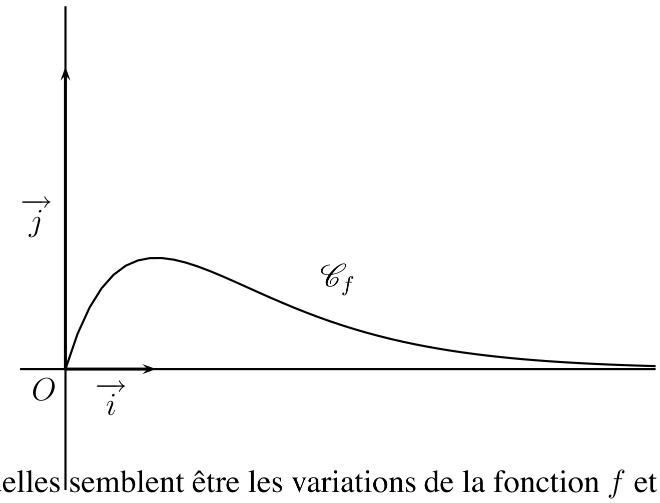
Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ et } g(x) = x^2e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie A

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donnée ci-dessous.



1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?

2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.

3. Tracer sur la figure jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.

4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Partie B

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Colorier sur la figure cette partie du plan.

2. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$. Démontrer que $I = 1 - \dfrac{2}{e}$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = -(x^2 + 2x)e^{-x}.$$

a. Calculer la dérivée H' de la fonction H.

b. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction g.

4. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.