

EXERCICE 2

PARTIE A

1) Il semble que la fonction f soit strictement croissante sur $[0, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. D'autre part, il semble que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2) **Variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.** La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel positif x ,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

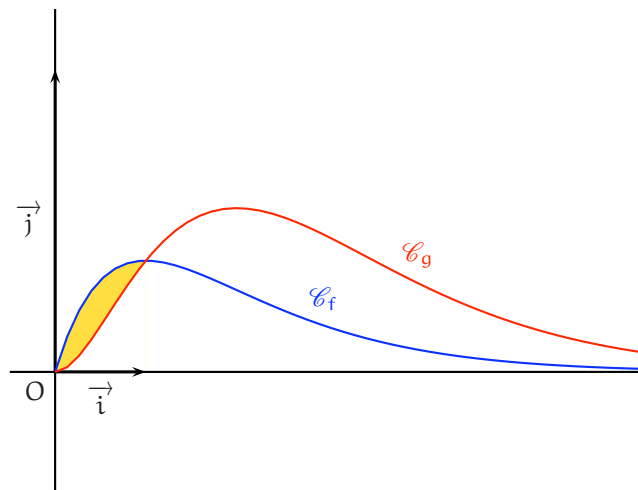
Pour tout réel positif x , on a $e^{-x} > 0$. Par suite, pour tout réel positif x , $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $[0, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$ puis que la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel positif x , $f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty. \text{ Par suite, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0.$$

Les conjectures émises à la question 1) sont donc validées.

3) La calculatrice permet de construire le graphique suivant :



4) Il semble que \mathcal{C}_f soit strictement au-dessus de \mathcal{C}_g sur $]0, 1[$, strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$ et enfin il semble que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g se coupent aux points d'abscisses 0 et 1. Démonstrons-le.

Soit x un réel positif.

$$g(x) - f(x) = x^2e^{-x} - xe^{-x} = x(x - 1)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x , on a $e^{-x} > 0$. Par suite, pour tout réel positif x , $g(x) - f(x)$ est du signe de $x(x - 1)$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g(x) - f(x)$	0	-	0 +

On en déduit que \mathcal{C}_f est strictement au-dessus de \mathcal{C}_g sur $]0, 1[$ et strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$. Enfin, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g se coupent en leurs points d'abscisses 0 et 1. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et donc les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g se coupent aux points de coordonnées $(0, 0)$ et $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

\mathcal{C}_f est strictement au-dessus de \mathcal{C}_g sur $]0, 1[$ et strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$.
Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g se coupent aux points de coordonnées $(0, 0)$ et $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

PARTIE B

1) Voir graphique.

2) Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$\begin{aligned}u(x) &= x & v(x) &= -e^{-x} \\u'(x) &= 1 & v'(x) &= e^{-x}\end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) \, dx &= \int_0^1 x e^{-x} \, dx = [x \times (-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x}) \, dx = -e^{-1} + 0 + \int_0^1 e^{-x} \, dx \\&= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

$$I = 1 - \frac{2}{e}.$$

3) a) La fonction H est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}H'(x) &= -(2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x)(-e^{-x}) = -(2x + 2)e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x} = (-2x - 2 + x^2 + 2x)e^{-x} \\&= (x^2 - 2)e^{-x}.\end{aligned}$$

b) Pour $x \geq 0$, posons $G(x) = H(x) - 2e^{-x}$. G est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geq 0$,

$$G'(x) = H'(x) + 2e^{-x} = (x^2 - 2)e^{-x} + 2e^{-x} = x^2 e^{-x} = g(x).$$

Une primitive de la fonction g sur $[0, +\infty[$ est donc la fonction $G : x \mapsto H(x) - 2e^{-x} = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

Une primitive de la fonction g sur $[0, +\infty[$ est donc la fonction $G : x \mapsto -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

4) D'après la question A.4., la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de la courbe \mathcal{C}_g sur $[0, 1]$. Par suite,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx - \int_0^1 g(x) \, dx = \left(1 - \frac{2}{e}\right) - (G(1) - G(0)) \\&= \left(1 - \frac{2}{e}\right) - (-(1^2 + 2 + 2)e^{-1} + 2e^0) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) - \left(2 - \frac{5}{e}\right) = \frac{3}{e} - 1.\end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{3}{e} - 1.$$