

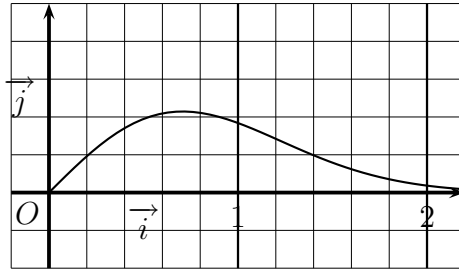
EXERCICE 1 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$).

b. Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a , l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n .

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et 1

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n , $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On se donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interprétez ces résultats.