BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

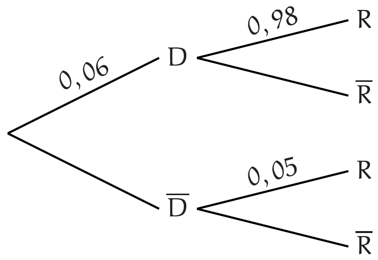
- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

1) Représentons la situation par un arbre.



2) a) La probabilité demandée est $p(D \cap \overline{R})$. Or

$$p(D \cap \overline{R}) = p(D) \times p_D(\overline{R}) = p(D) \times (1 - p_D(R)) = 0,06 \times 0,02 = 0,0012.$$

$\boxed{\text{La probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté est } 0,0012.}$

b) La probabilité demandée est $p(R \cap \overline{D}) + p(\overline{R} \cap D)$. On a déjà $p(\overline{R} \cap D) = 0,0012$. Il manque

$$p(R \cap \overline{D}) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(R) = (1 - p(D)) \times p_{\overline{D}}(R) = 0,94 \times 0,05 = 0,047,$$

et donc $p(R \cap \overline{D}) + p(\overline{R} \cap D) = 0,047 + 0,0012 = 0,0482$.

$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait erreur de contrôle est } 0,0482.}$

3) La probabilité demandée est $p(\overline{R})$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(\overline{R}) = p(\overline{R} \cap D) + p(\overline{R} \cap \overline{D}) = 0,0012 + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 0,0012 + 0,94 \times (1 - 0,05) = 0,8942.$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est } 0,8942.}$

4) a) Notons X le nombre de succès au cours des quatre contrôles. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le lecteur n'est pas rejeté » avec une probabilité $p = 0,8942$ (d'après 3)) ou « le lecteur est rejeté » avec une probabilité $1 - p = 0,1058$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8942$.

La variable aléatoire G prend 3 valeurs : $120 - 50 = 70$ euros, $60 - 50 = 10$ euros et -50 euros.

- $p(G = 70) = p(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,8942^4 \times 0,1058^0 = 0,8942^4 = 0,64$ à 10^{-2} près.
- $p(G = 10) = p(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,8942^3 \times 0,1058^1 = 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 = 0,30$ à 10^{-2} près.
- $p(G = -50) = 1 - p(G = 70) - p(G = 10) = 1 - 0,8942^4 - 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 = 0,06$ à 10^{-2} près.

Récapitulons ces résultats dans un tableau.

g_i	70	10	-50
$p(G = g_i)$	$0,64$	$0,30$	$0,06$

b) $E(G) = 70 \times p(G = 70) + 10 \times p(G = 10) - 50 \times p(G = -50)$ et donc

$$\begin{aligned} E(G) &= 70 \times 0,8942^4 + 10 \times 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058 - 50 \times (1 - 0,8942^4 - 4 \times 0,8942^3 \times 0,1058) \\ &= 44,88 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

Ceci signifie que chaque lecteur rapportera en moyenne $44,88$ euros.

EXERCICE 2

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

1) Soit M un point du plan.
• Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$. Dans ce cas, $z = z' = \omega$ et donc $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.
• Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$ et

$$r(M) = M' \Rightarrow \Omega M = \Omega M' \Rightarrow \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \Rightarrow \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1,$$

et

$$r(M) = M' \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha\ [2\pi] \Rightarrow \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha\ [2\pi].$$

Ainsi, $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument α. On en déduit que $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$ ou encore que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).}$$

PARTIE B

1) a) Soit M un point du plan.

$$f(M) = M \Leftrightarrow iz + 4 + 4i = z \Leftrightarrow (1 - i)z = 4 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{4 + 4i}{1 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(4 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{4 + 4i + 4i - 4}{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow z = \frac{8i}{2} \Leftrightarrow z = 4i.$$

$$\boxed{\omega = 4i.}$$

b) Soit M un point du plan.

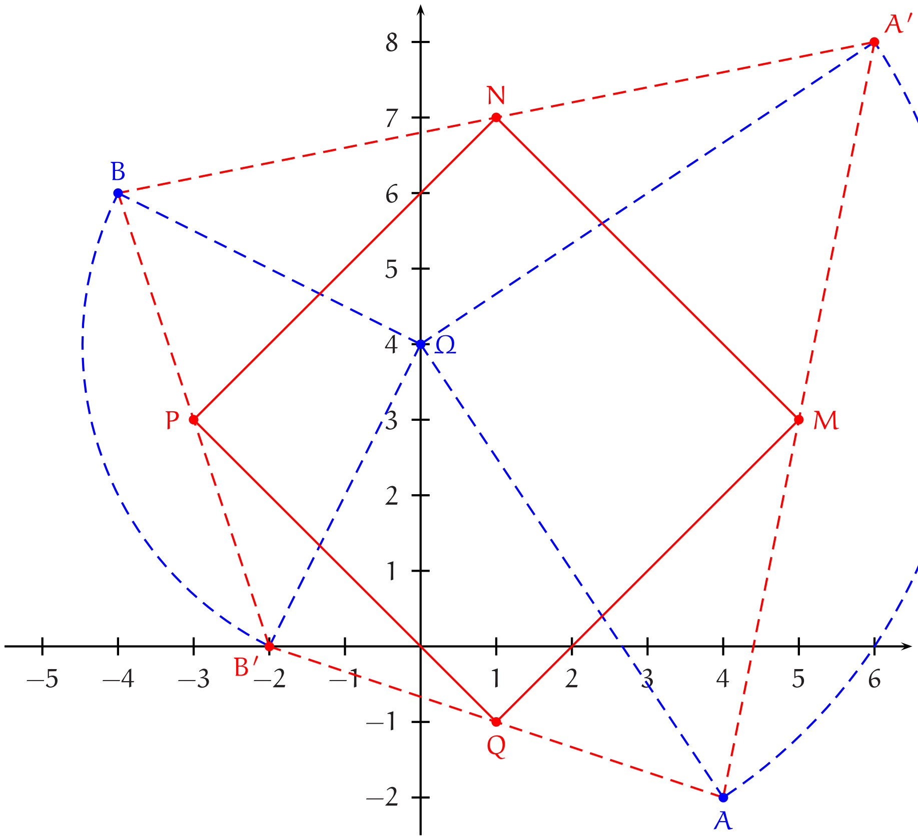
$$z' - 4i = z' - \omega = (iz + 4 + 4i) - (i\omega + 4 + 4i) = i(z - \omega) = i(z - 4i).$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan, } z' - 4i = i(z - 4i).}$$

c) On a $i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{i\pi/2}$ et on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est la rotation de centre } \Omega(0, 4) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

2) a)



b) $a' = 4i + i(a - 4i) = 4i + i(4 - 2i - 4i) = 4i + i(4 - 6i) = 4i + 4i + 6 = 6 + 8i$ et
$b' = 4i + i(b - 4i) = 4i + i(-4 + 6i - 4i) = 4i + i(-4 + 2i) = 4i - 4i - 2 = -2$.

$$\boxed{a' = 6 + 8i \text{ et } b' = -2.}$$

b) $m = \dfrac{a + a'}{2} = \dfrac{4 - 2i + 6 + 8i}{2} = 5 + 3i$.

c) $z_{\overrightarrow{MN}} = n - m = (1 + 7i) - (5 + 3i) = -4 + 4i$ et $z_{\overrightarrow{QP}} = p - q = (-3 + 3i) - (1 - i) = -4 + 4i$. Ainsi, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et donc

$$\boxed{\text{le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.}}$$

c) $q - m = (1 - i) - (5 + 3i) = -4 - 4i$ et donc

$$\frac{q - m}{n - m} = \frac{-4 - 4i}{-4 + 4i} = \frac{4i(-1 + i)}{4(-1 + i)} = i.$$

Par suite, le point Q est l'image du point N par la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que $MQ = MN$ et $\widehat{QMN} = 90°$. Puisque le parallélogramme MNPQ a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur

$$\boxed{\text{le quadrilatère MNPQ est un carré.}}$$

4) Le vecteur $\overrightarrow{B'A}$ a pour coordonnées $(6, -2)$ et le vecteur $\overrightarrow{\Omega N}$ a pour coordonnées $(1, 3)$. Donc

$$\overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{\Omega N} = 6 \times 1 - 2 \times 3 = 0,$$

et donc

$$\boxed{\text{les droites } (B'A) \text{ et } (\Omega N) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

EXERCICE 3

1) a) Puisque $2-1+1=2\neq 0$, le barycentre du système $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ est bien défini. De plus, $\overrightarrow{EA}$ a pour coordonnées $(-3,5,1)$, $\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées $(-4,9,-1)$ et $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(2,-1,-3)$. On en déduit que le vecteur $2\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(2\times(-3)+4+2, 2\times 5-9-1, 2\times 1+1-3)$ ou encore $(0,0,0)$.
Ainsi, $2\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{0}$ et donc

$$\boxed{E=\text{bar}\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}.}$$

b) Soit M un point de l'espace. On sait que $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(2-1+1)\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{ME}$. Par suite,

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{ME}\right\|=2\sqrt{21}\Leftrightarrow 2ME=2\sqrt{21}\Leftrightarrow ME=\sqrt{21}.$$

$$\boxed{\Gamma \text{ est la sphère de centre } E \text{ et de rayon } \sqrt{21}.}$$

2) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1,4,-2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(1,2,0)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ on a nécessairement $-k=1$ et aussi $4k=2$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et D ne sont pas alignés.

$$\boxed{\text{Les points } A, B \text{ et } D \text{ définissent un plan.}}$$

b) Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(2,-1,-3)$. Or

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}=(-1)\times 2+4\times(-1)+(-2)\times(-3)=-2-4+6=0$$

et

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EC}=1\times 2+2\times(-1)+0\times(-3)=2-2+0=0.$$

La droite (EC) est donc orthogonale aux droites (AB) et (AD). Puisque la droite (EC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABD),

$$\boxed{\text{la droite } (EC) \text{ est orthogonale au plan } (ABD).}$$

c) Le plan (ABD) est le plan passant par $A(1,-1,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{EC}(2,-1,-3)$.
Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in(ABD)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{EC}=0\Leftrightarrow 2(x-1)-(y+1)-3(z-3)=0\Leftrightarrow 2x-y-3z+6=0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (ABD) \text{ est } 2x-y-3z+6=0.}$$

3) a) La droite (EC) est la droite passant par $E(4,-6,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EC}(2,-1,-3)$. Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de le droite } (EC) \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x=4+2k\\ y=-6-k\\ z=2-3k\end{array}\right., k\in\mathbb{R}.}$$

b) Soit $M(4+2k,-6-k,2-3k)$, $k\in\mathbb{R}$, un point de la droite (EC).

$$M\in(ABD)\Leftrightarrow 2(4+2k)-(-6-k)-3(2-3k)+6=0\Leftrightarrow 14k+14=0\Leftrightarrow k=-1.$$

Quand $k=-1$, on obtient les coordonnées du point F :

$$\boxed{F(2,-5,5).}$$

4) On a vu à la question 1)b) que Γ est la sphère de centre E et de rayon $R=\sqrt{21}$. La distance d du centre E de Γ au plan (ABD) est la distance de E à son projeté orthogonal sur ce plan c'est-à-dire la distance EF. Or

$$EF=\sqrt{(2-4)^2+(-5+6)^2+(5-2)^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}.$$

Puisque $d<R$, on sait que l'intersection de la sphère Γ et du plan (ABD) est un cercle. Son centre est le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABD) : c'est le point $F(2,-5,5)$.
Enfin, si on note r le rayon du cercle, le théorème de Pythagore permet d'écrire $R^2=r^2+d^2$ et donc

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{21-14}=\sqrt{7}.$$

$$\boxed{\text{L'intersection de } \Gamma \text{ et } (ABD) \text{ est un cercle de centre } F(2,-5,5) \text{ et de rayon } \sqrt{7}.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) Puisque la fonction f' est continue sur $[0,1]$, $\int_0^1 f'(t)\,dt$ existe et

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}.$$

2) Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0,1]$, $\int_0^1 f(x)\,dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe (C). Ce domaine contient le triangle OAB où B a pour coordonnées $(1,0)$. L'aire de ce rectangle est égale à $\dfrac{1 \times \frac{1}{2e}}{2}$ ou encore $\dfrac{1}{4e}$ et donc $\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \dfrac{1}{4e}$.

Partie B

1) Pour tout réel non nul x, on a $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \times e^{-x} = \dfrac{x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times e^{-x} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times e^{-x}$.

Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$ et d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On en déduit que la droite (Ox) est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

2) La fonction g est continue sur $[0,+\infty[$ en tant que polynôme et est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de trois fonctions strictement croissantes sur $[0,+\infty[$, à savoir les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x-1$.
Puisque la fonction g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on sait que pour tout réel k élément de $[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[= [-1,+\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. En particulier, puisque $0 \in [-1,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. On note α cette solution.
Puisque $g(0) = -1 \neq 0$, on a plus précisément $\alpha \in]0,+\infty[$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(e^{-x} + x(-e^{-x}))(x^2+1) - xe^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{-x}((1-x)(x^2+1) - 2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{(-x^3 - x^2 - x + 1)e^{-x}}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{g(x)e^{-x}}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout réel positif x, $-\dfrac{e^{-x}}{(x^2+1)^2} < 0$ et donc pour tout réel positif x, $f'(x)$ a le signe contraire de $g(x)$.

b) La fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et s'annule en α. Donc, si $0 \leqslant x < \alpha$, on a $g(x) < g(\alpha)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, on a $g(x) > g(\alpha)$ ou encore $g(x) > 0$.
Puisque les fonctions f' et g sont de signes contraires sur $[0,+\infty[$, on en déduit le tableau de variations de f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f			$f(\alpha)$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

4) a) Soit $x \geqslant 0$. On a déjà $\dfrac{x}{x^2+1} \geqslant 0$ et d'autre part

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{2(x^2+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geqslant 0,$$

et donc $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0, +\infty[,\ 0 \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}.}$$

b) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[n, 2n]$ on a $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et donc, puisque pour tout réel x de $[n, 2n]$, $e^{-x} > 0$, on en déduit que

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [n, 2n],\ 0 \leqslant \frac{xe^{-x}}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale, on obtient alors $0 \leqslant \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\, dx \leq \int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}\, dx$ avec

$$\int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_n^{2n} = \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}).$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}).}$$

c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}) = 0$. Mais alors, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

