EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

La courbe (C), donnée en annexe, page 6, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0,+\infty[$.

La courbe (C) passe par les points O et $A\left(1, \frac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0,1]$, elle est au dessus du segment $[OA]$.

1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}$.
2. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la **Partie A** est définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

   Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

   b) En déduire les variations de f sur $[0,+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{2n} f(x)\,dx$.

   a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

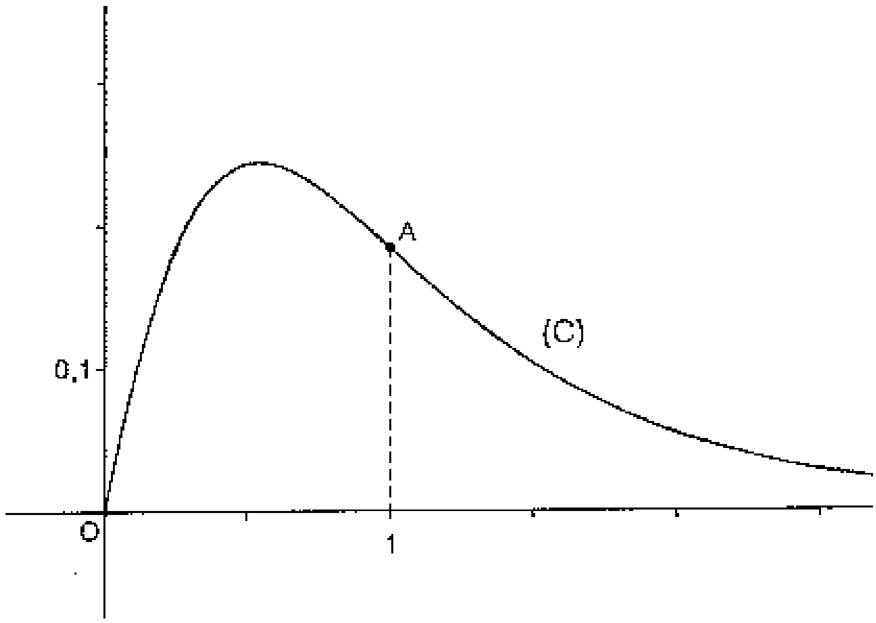
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.

   c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.



EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

La courbe (C), donnée en annexe, page 6, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0,+\infty[$.

La courbe (C) passe par les points O et $A\left(1,\frac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0,1]$, elle est au dessus du segment $[OA]$.

1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}$.
2. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la **Partie A** est définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{xe^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=x^3+x^2+x-1$.

   Établir que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

   b) En déduire les variations de f sur $[0,+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\int_n^{2n} f(x)\,dx$.

   a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(e^{-n}-e^{-2n}\right)$.

   c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.