EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x$.

La courbe(C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

   c) Étudier la position relative de (D) et de (C).

   d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - \frac{2}{3}x$.

   e) En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a) On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que pour tout x réel, $f\,'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - 2}{3(\mathrm{e}^{x} + 1)}$.

   b) En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln\left(1 + e^{-x}\right)\mathrm{d}x$
2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$.
3. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
   Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).