EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + \frac{1}{3}x$.

La courbe(C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

   c) Étudier la position relative de (D) et de (C).

   d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(e^{x} + 1\right) - \frac{2}{3}x$.

   e) En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a) On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que pour tout x réel, $f\,'(x) = \dfrac{e^{x} - 2}{3(e^{x} + 1)}$.

   b) En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln\left(1 + e^{-x}\right) dx$
2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1 + e^{-x}\right) \leqslant e^{-x}$.

   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$.
3. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
   Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 2

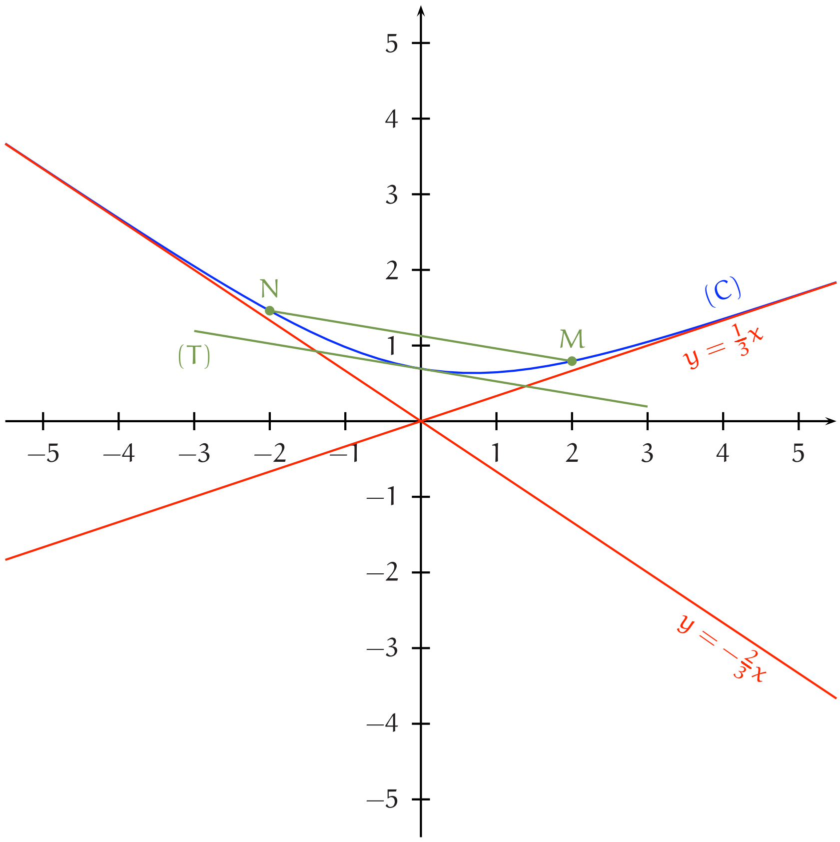
Partie A

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+0) = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}x = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) D'après la question a), $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \dfrac{1}{3}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$. Par suite,

$$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y = \frac{1}{3}x \text{ est asymptote à la courbe } (C) \text{ en } +\infty.}$$



c) Pour tout réel x, $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1+e^{-x})$. Or, pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $1+e^{-x} > 1$ puis, par stricte croissance de la fonction $y \mapsto \ln(y)$ sur $]0,+\infty[$, pour tout réel x, $\ln(1+e^{-x}) > \ln(1)$ ou encore

$$\text{pour tout réel } x,\ \ln(1+e^{-x}) > 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) - \dfrac{1}{3}x > 0$ et donc

$$\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ est strictement au-dessus de la droite } (D) \text{ d'équation } y = \frac{1}{3}x \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

d) Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}(e^{x}+1)) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}) + \ln(e^{x}+1) + \frac{1}{3}x = -x + \ln(e^{x}+1) + \frac{1}{3}x \\ &= \ln(e^{x}+1) - \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = \ln(e^{x}+1) - \frac{2}{3}x.}$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = \ln(0+1) = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{2}{3}x = +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{1}{3} = -\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{3} = \frac{-3+1+e^x}{3(e^x+1)} = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}.}$$

b) Pour tout réel x, $3(e^x+1) > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 2$. Or

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2) \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}),$$

et de même, $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(2)$. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	∞	↘	$\ln(3) - \frac{2}{3}\ln(2)$	↗	$+\infty$

$$\begin{aligned} f(\ln(2)) &= \ln(1+e^{-\ln(2)}) + \frac{\ln(2)}{3} \\ &= \ln\left(1+\tfrac{1}{e^{\ln(2)}}\right) + \frac{\ln(2)}{3} \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{\ln(2)}{3} \\ &= \ln(3) - \ln(2) + \frac{\ln(2)}{3} \\ &= \ln(3) - \frac{2\ln(2)}{3} \end{aligned}$$

Partie B

1) D'après la question A.1)c), la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $[0,n]$ et donc

$$d_n = \int_0^n \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right) dx = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx.$$

2) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,n]$, $\ln(1+e^{-x}) \leqslant e^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$d_n \leqslant \int_0^n e^{-x}\, dx.$$

Or, $\displaystyle\int_0^n e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^n = -e^{-n} + e^0 = 1 - e^{-n}$ et puisque $e^{-n} > 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^n e^{-x}\, dx \leqslant 1$ puis que $d_n \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ d_n \leqslant 1.}$$

3) D'après la question précédente, la suite $(d_n)_{n\geqslant1}$ est majorée. Vérifions que la suite $(d_n)_{n\geqslant1}$ est croissante.

Soit n un entier naturel non nul. D'après la relation de Chasles

$$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx - \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx + \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx - \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx.$$

Maintenant, pour tout réel x de $[n, n+1]$, $\ln(1+e^{-x}) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx \geqslant 0$ ou encore $d_{n+1} - d_n \geqslant 0$. On a ainsi montré que pour tout entier naturel non nul n, $d_{n+1} - d_n \geqslant 0$ et donc que la suite $(d_n)_{n\geqslant1}$ est croissante.

En résumé, la suite $(d_n)_{n\geqslant1}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (d_n)_{n\geqslant1} \text{ est convergente.}}$$

Partie C

1) Le coefficient directeur de (T) est $f'(0) = \dfrac{e^0 - 2}{3(e^0+1)} = \dfrac{1-2}{3(1+1)} = -\dfrac{1}{6}$.

2) Soit x un réel non nul. Soient M et N les points de (C) d'abscisses respectives x et $-x$. D'après la question A.1)d)

$$\begin{aligned}
\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} &= \frac{1}{x-(-x)}\left(\left(\ln(1+e^{-x_M}) + \frac{1}{3}x_M\right) - \left(\ln(e^{x_N}+1) - \frac{2}{3}x_N\right)\right) \\
&= \frac{1}{2x}\left(\left(\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x\right) - \left(\ln(e^{-x}+1) + \frac{2}{3}x\right)\right) \\
&= \frac{1}{2x} \times \left(-\frac{1}{3}x\right) = -\frac{1}{6} = f'(0).
\end{aligned}$$

Ainsi, les droites (T) et (MN) ont mêmes coefficients directeurs et donc

$$\boxed{\text{les droites } (T) \text{ et } (MN) \text{ sont parallèles.}}$$

