EXERCICE 2 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(1+xe^{-x}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

3) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1) Première méthode.

a) Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $A(\lambda)$.

b) Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq\lambda\times f(1)$.

2) Deuxième méthode.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ.

b) On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u)\leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1$.

3) ***Application numérique.***

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $A(5)$, arrondi au centième.
Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda=5$?

ANNEXE 1
Exercice 2

(À rendre avec la copie)