**EXERCICE 2**

**PARTIE I**

**1)** D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0.$$

Puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+xe^{-x}) = \ln(1+0) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

**2)** La fonction $x \mapsto 1 + xe^{-x}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et est strictement positive sur cet intervalle et la fonction $y \mapsto \ln y$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $f$ est dérivable sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{(1+xe^{-x})'}{1+xe^{-x}} = \frac{1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})}{1+xe^{-x}} = \frac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}.$$

Maintenant, pour tout réel positif $x$, $\dfrac{e^{-x}}{1+xe^{-x}} > 0$. On en déduit que pour tout réel positif $x$, $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

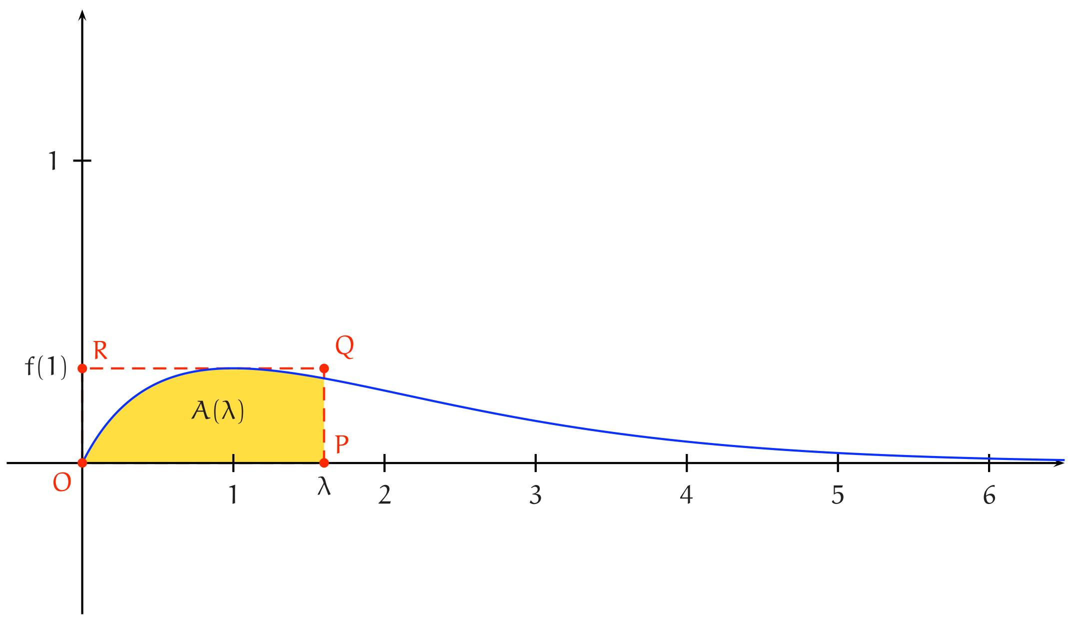
**3)** On en déduit le tableau de variations de $f$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\ln(1+e^{-1})$ | $\searrow$ | $0$ |

**PARTIE II**

**1) Première méthode.**

**a)** Soit $\lambda$ un réel strictement positif. La fonction $f$ est continue et positive sur $[0, \lambda]$. Donc $\mathcal{A}(\lambda)$ est l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de $f$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.



**b)** Puisque la fonction $f$ admet un maximum en $1$ d'après la question I.3), le domaine considéré est contenu dans le rectangle $OPQR$ où $P(\lambda, 0)$, $Q(\lambda, f(1))$ et $R(0, f(1))$. Son aire $A(\lambda)$ est donc inférieure ou égale à l'aire de ce rectangle ou encore $A(\lambda) \leqslant \lambda f(1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \lambda,\ A(\lambda) \leqslant \lambda f(1).}$$

**2) Deuxième méthode.**

**a)** Pour $x$ dans $[0, \lambda]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[0, \lambda]$ et pour $x$ dans $[0, \lambda]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions $u'$ et $v'$ sont continues sur $[0, \lambda]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda xe^{-x}\,dx &= \left[x \times (-e^{-x})\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda 1 \times (-e^{-x})\,dx = -\lambda e^{-\lambda} + 0 - \left[e^{-x}\right]_0^\lambda \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda,\ \int_0^\lambda xe^{-x}\,dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.}$$

**b)** Soit $\lambda$ un réel strictement positif. Pour tout réel $x$ de $[0, \lambda]$, le réel $u = xe^{-x}$ est positif. On en déduit que pour tout réel $x$ de $[0, \lambda]$, $\ln(1 + xe^{-x}) \leqslant xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \ln(1 + xe^{-x})\,dx \leqslant \int_0^\lambda xe^{-x} = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \lambda,\ A(\lambda) \leqslant -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.}$$

**3) Application numérique.** Quand $\lambda = 5$, la majoration de la question 1)b) fournit $A(5) \leqslant 5\ln(1 + e^{-1}) = 1,566\ldots$ et donc

$$A(5) \leqslant 1,57.$$

La majoration de la question 2)b) fournit quant à elle $A(5) \leqslant -5e^{-5} - e^{-5} + 1 = 0,959\ldots$ et donc

$$A(5) \leqslant 0,96.$$

Dans le cas où $\lambda = 5$, la méthode de la question 2) fournit un meilleur majorant que la méthode de la question 1).