EXERCICE 2 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(1+xe^{-x}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

3) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathrm{A}(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On se propose de majorer $\mathrm{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1) Première méthode.

a) Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathrm{A}(\lambda)$.

b) Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathrm{A}(\lambda)\leq\lambda\times f(1)$.

2) Deuxième méthode.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ.

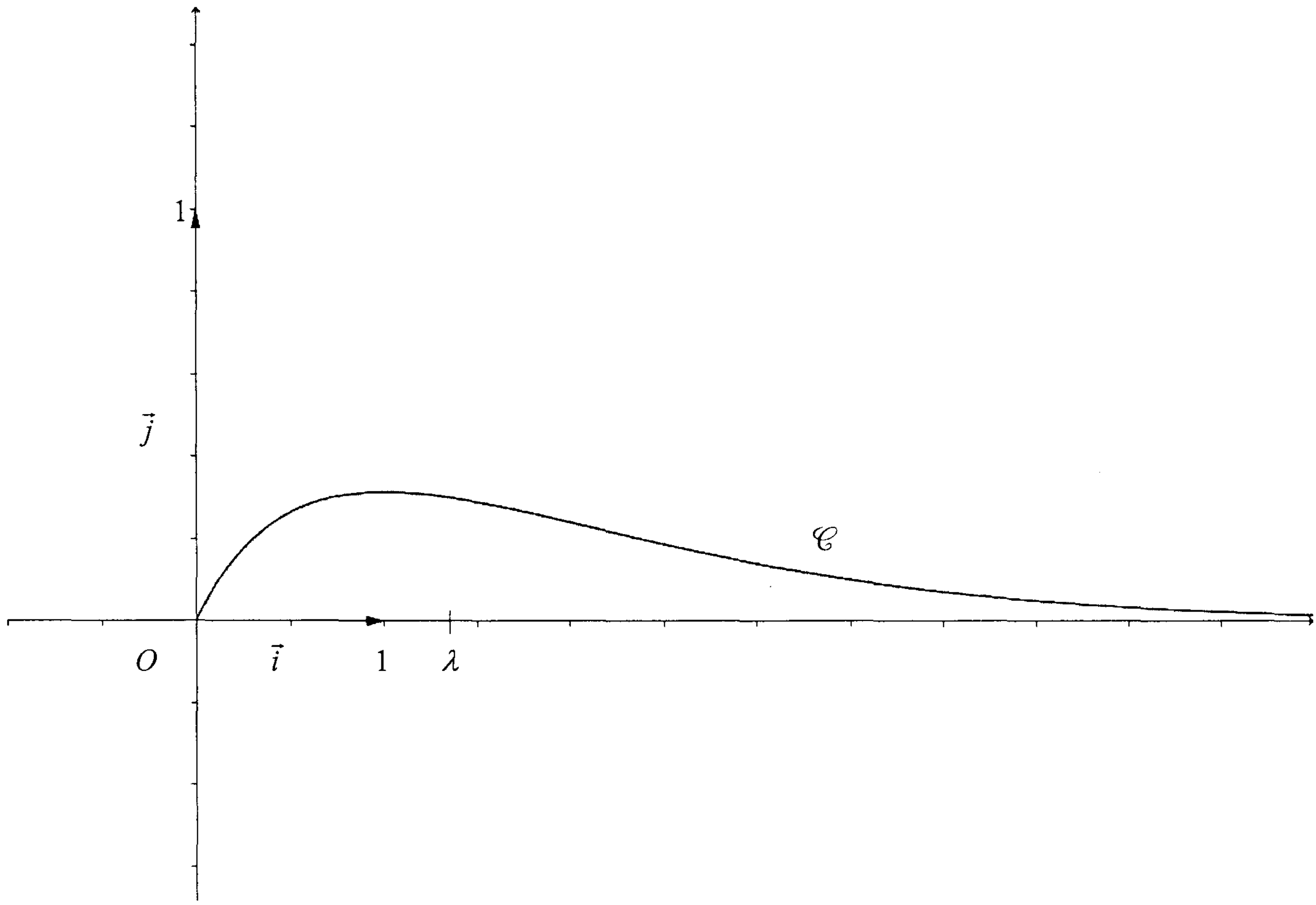
b) On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u)\leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathrm{A}(\lambda)\leq-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}+1$.

3) ***Application numérique.***

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de A(5), arrondi au centième.
Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda=5$?

ANNEXE 1
Exercice 2

(À rendre avec la copie)



EXERCICE 2

PARTIE I

1) D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x/x}=0.$$

Puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+xe^{-x})=\ln(1+0)=0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.}$$

2) La fonction $x\mapsto 1+xe^{-x}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et est strictement positive sur cet intervalle et la fonction $y\mapsto \ln y$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$f'(x)=\frac{(1+xe^{-x})'}{1+xe^{-x}}=\frac{1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})}{1+xe^{-x}}=\frac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}.$$

Maintenant, pour tout réel positif x, $\dfrac{e^{-x}}{1+xe^{-x}}>0$. On en déduit que pour tout réel positif x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

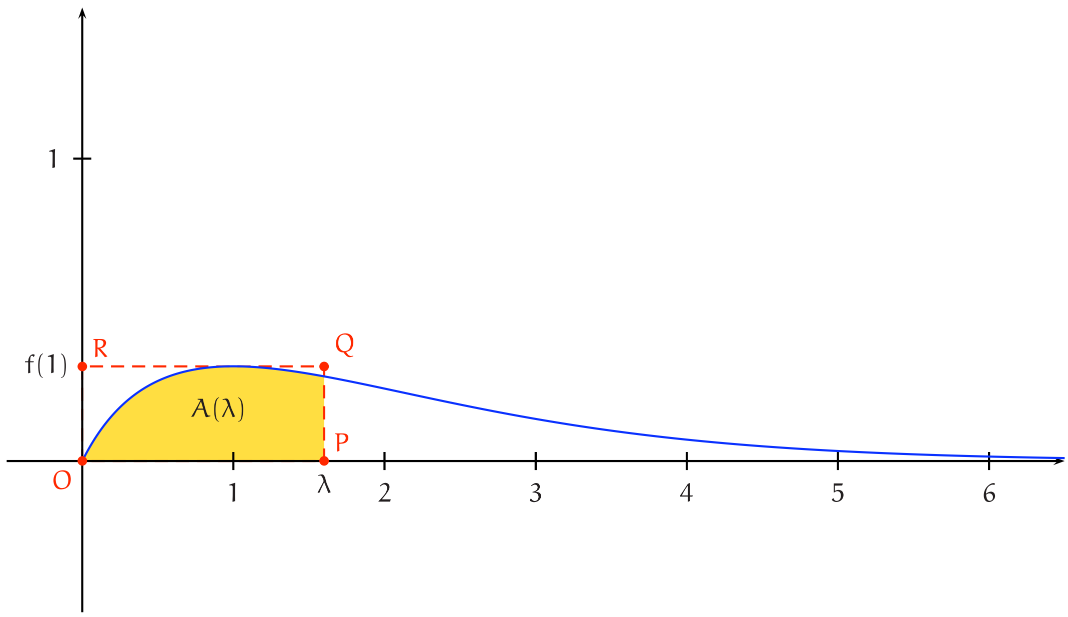
3) On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\ln(1+e^{-1})$	$\searrow$	0

PARTIE II

1) Première méthode.

a) Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est continue et positive sur $[0,\lambda]$. Donc $A(\lambda)$ est l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$.



b) Puisque la fonction f admet un maximum en 1 d'après la question I.3), le domaine considéré est contenu dans le rectangle $OPQR$ où $P(\lambda, 0)$, $Q(\lambda, f(1))$ et $R(0, f(1))$. Son aire $\mathcal{A}(\lambda)$ est donc inférieure ou égale à l'aire de ce rectangle ou encore $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant \lambda f(1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \lambda,\ \mathcal{A}(\lambda) \leqslant \lambda f(1).}$$

2) Deuxième méthode.

a) Pour x dans $[0, \lambda]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, \lambda]$ et pour x dans $[0, \lambda]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, \lambda]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda} xe^{-x}\, dx &= \left[x \times (-e^{-x})\right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} 1 \times (-e^{-x})\, dx = -\lambda e^{-\lambda} + 0 - \left[e^{-x}\right]_0^{\lambda} \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda,\ \int_0^{\lambda} xe^{-x}\, dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.}$$

b) Soit λ un réel strictement positif. Pour tout réel x de $[0, \lambda]$, le réel $u = xe^{-x}$ est positif. On en déduit que pour tout réel x de $[0, \lambda]$, $\ln(1 + xe^{-x}) \leqslant xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^{\lambda} \ln(1 + xe^{-x})\, dx \leqslant \int_0^{\lambda} xe^{-x} = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \lambda,\ \mathcal{A}(\lambda) \leqslant -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.}$$

3) Application numérique. Quand $\lambda = 5$, la majoration de la question 1)b) fournit $\mathcal{A}(5) \leqslant 5\ln(1 + e^{-1}) = 1,566\ldots$ et donc

$$\mathcal{A}(5) \leqslant 1,57.$$

La majoration de la question 2)b) fournit quant à elle $\mathcal{A}(5) \leqslant -5e^{-5} - e^{-5} + 1 = 0,959\ldots$ et donc

$$\mathcal{A}(5) \leqslant 0,96.$$

Dans le cas où $\lambda = 5$, la méthode de la question 2) fournit un meilleur majorant que la méthode de la question 1).

