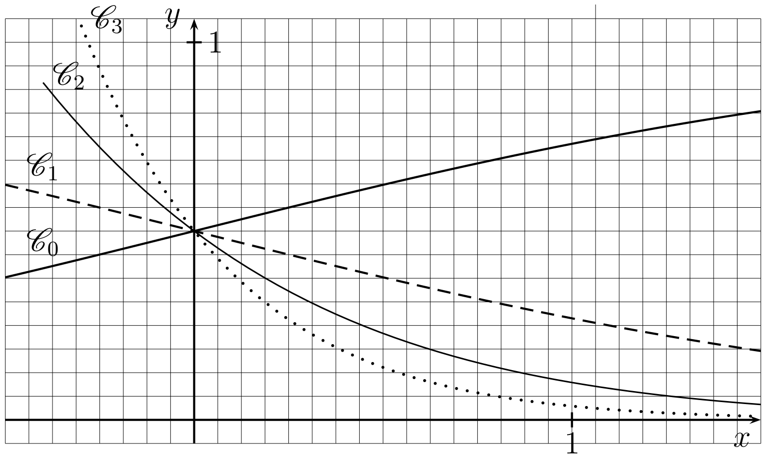
**EXERCICE 4 (6 points )**

**(Commun à tous les candidats)**

Soit $n$ un entier naturel.
On note $f_n$ la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Les courbes $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous.




## Partie A - Quelques propriétés des fonctions $f_n$ et des courbes $\mathscr{C}_n$

**1.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point $A$ en commun. Préciser ses coordonnées.

**2. Etude de la fonction** $f_0$

**a.** Etudier le sens de variation de $f_0$.

**b.** Préciser les limites de la fonction $f_0$ en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

**c.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f_0$ sur $\mathbb{R}$.

**3. Etude de la fonction** $f_1$

**a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel $x$.

**b.** En déduire les limites de la fonction $f_1$ en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi que son sens de variation.

**c.** Donner une interprétation géométrique de **3.a.** pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

**4. Etude de la fonction** $f_n$ **pour** $n \geqslant 2$

**a.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel $x$, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

**b.** En déduire les limites de la fonction $f_n$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**c.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}$.

## Partie B - Etude d'une suite liée aux fonctions $f_n$

On pose, pour tout entier naturel $n$ : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

**1.** Calculer $u_1$ puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire $u_0$.

**2.** Démontrer que, pour tout entier $n$ : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

**3.** Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.