EXERCICE 4

Partie A - Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$.

1) Soit n un entier naturel. $f_n(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$ et donc le point A de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n\text{, le point A de coordonnées } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ appartient à la courbe } \mathscr{C}_n.}$$

2) Etude de la fonction f_0.

a) Pour tout réel x, $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. Pour tout réel x, $1+e^{-x} > 0$ et donc f_0 est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_0'(x) = -\frac{0-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

On en déduit que pour tout réel x, $f_0'(x) > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la fonction } f_0 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

b) Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{-x} = +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = 0.}$$

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1.}$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

c) Tableau de variation de la fonction f_0.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	+	
f_0	0 ↗	1

3) Etude de la fonction f_1.

a) Soit x un réel.

$$f_1(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{1}{1+e^{-x}} = f_0(x).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_0(x) = f_1(-x).}$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_0(-x) = \lim\limits_{X\to+\infty} f_0(X) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_0(-x) = \lim\limits_{X\to-\infty} f_0(X) = 0$.

Etudions maintenant les variations de la fonction f_1.

1ère solution. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f_1'(x) = (f_0(-x))' = -f_0'(-x).$$

Puisque pour tout réel x, $f_0'(-x) > 0$, on en déduit que pour tout réel x, $f_1'(x) < 0$ et donc que la fonction f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2ème solution. La fonction $g\ :\ x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $f_0\ :\ y \mapsto f_0(y)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $f_1 = f_0 \circ h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout réel x, le point de $\mathscr{C}_0$ d'abscisse x a même ordonnée que le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse $-x$. Ceci signifie que

$$\boxed{\text{Les courbes } \mathscr{C}_0 \text{ et } \mathscr{C}_1 \text{ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.}}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

4) Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$.

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel x,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^{nx}(1+e^{-x})} = \frac{1}{e^{nx}+e^{nx-x}} = \frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}.$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Puisque $n > 0$ et $n-1 > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{nx} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ et de même $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{(n-1)x} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{nx} + e^{(n-1)x}) = 0$. Comme de plus, pour tout réel x, $e^{nx} + e^{(n-1)x} > 0$, on a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

• Puisque $n > 0$ et $n-1 > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{nx} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{(n-1)x} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{nx} + e^{(n-1)x}) = +\infty$ et donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0.}$$

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout réel x

$$f_n'(x) = -\frac{ne^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2}.$$

Or, $n > 0$, $n-1 > 0$ et pour tout réel x, $e^{nx} > 0$, $e^{(n-1)} > 0$ et $\left(e^{nx} + e^{(n-1)x}\right)^2 > 0$. Par suite, pour tout réel x, $f_n'(x) < 0$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f_n.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
f_n	$+\infty$	0

Partie B - Etude d'une suite liée aux fonctions f_n.

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+e^{-x}$. Une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+e^{-x})$. Par suite,

$$u_1 = \int_0^1 -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^{0}) = \ln(2) - \ln(1+e^{-1}).$$

Ensuite,

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1 \times 1 = 1,$$

et donc

$$u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1}).$$

$$\boxed{u_0 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1}) \text{ et } u_1 = \ln(2) - \ln(1+e^{-1}).}$$

2) Soit n un entier naturel.

Soit x un réel de $[0,1]$, $1+e^{-x} \geqslant 1 > 0$ et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1$. On multiplie alors les trois membres de cet encadrement par le réel positif e^{-nx} et on obtient

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ 0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}} \leqslant e^{-nx}.$$

Par positivité et croissance de l'intégration, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{n}\times\left(-ne^{-nx}\right)\,dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^{0} = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

Maintenant, $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$. En tenant compte de l'encadrement de la question 2), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.