

## EXERCICE 4 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

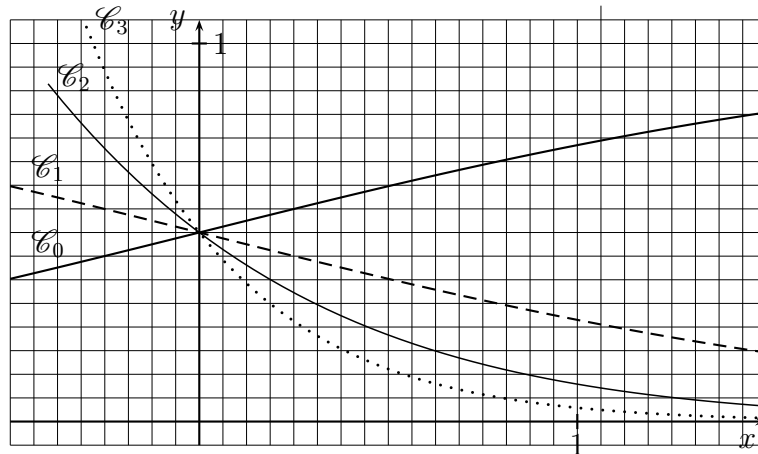
Soit  $n$  un entier naturel.

On note  $f_n$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

On note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Les courbes  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  sont représentées ci-dessous.



### Partie A - Quelques propriétés des fonctions $f_n$ et des courbes $\mathcal{C}_n$

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , les courbes  $\mathcal{C}_n$  ont un point  $A$  en commun. Préciser ses coordonnées.

#### 2. Etude de la fonction $f_0$

- Etudier le sens de variation de  $f_0$ .
- Préciser les limites de la fonction  $f_0$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ces limites.
- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_0$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### 3. Etude de la fonction $f_1$

- Démontrer que  $f_0(x) = f_1(-x)$  pour tout nombre réel  $x$ .
- En déduire les limites de la fonction  $f_1$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  ainsi que son sens de variation.
- Donner une interprétation géométrique de **3.a.** pour les courbes  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$ .

#### 4. Etude de la fonction $f_n$ pour $n \geq 2$

- Vérifier que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  et pour tout nombre réel  $x$ , on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

- En déduire les limites de la fonction  $f_n$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- Calculer la dérivée  $f'_n(x)$  et dresser le tableau de variation de la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Partie B - Etude d'une suite liée aux fonctions $f_n$

On pose, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

1. Calculer  $u_1$  puis montrer que  $u_0 + u_1 = 1$ . En déduire  $u_0$ .

2. Démontrer que, pour tout entier  $n$  :  $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx$ .

3. Calculer l'intégrale :  $\int_0^1 e^{-nx} dx$ . En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.

## EXERCICE 4

### Partie A - Quelques propriétés des fonctions $f_n$ et des courbes $\mathcal{C}_n$ .

1) Soit  $n$  un entier naturel.  $f_n(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$  et donc le point  $A$  de coordonnées  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  appartient à la courbe  $\mathcal{C}_n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , le point  $A$  de coordonnées  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  appartient à la courbe  $\mathcal{C}_n$ .

#### 2) Etude de la fonction $f_0$ .

a) Pour tout réel  $x$ ,  $f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $1+e^{-x} > 0$  et donc  $f_0$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout réel  $x$ ,

$$f_0'(x) = -\frac{0 - e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

On en déduit que pour tout réel  $x$ ,  $f_0'(x) > 0$  et donc que

la fonction  $f_0$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

b) **Limite en  $-\infty$ .**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$  puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-x} = +\infty$  et donc

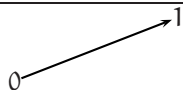
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0.$$

**Limite en  $+\infty$ .**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$  et que la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .

#### c) Tableau de variation de la fonction $f_0$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	+	
$f_0$		

#### 3) Etude de la fonction $f_1$ .

a) Soit  $x$  un réel.

$$f_1(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{1}{1+e^{-x}} = f_0(x).$$

Pour tout réel  $x$ ,  $f_0(x) = f_1(-x)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(-x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f_0(X) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(-x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} f_0(X) = 0$ .

Etudions maintenant les variations de la fonction  $f_1$ .

**1ère solution.** La fonction  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$

$$f_1'(x) = (f_0(-x))' = -f_0'(-x).$$

Puisque pour tout réel  $x$ ,  $f_0'(-x) > 0$ , on en déduit que pour tout réel  $x$ ,  $f_1'(x) < 0$  et donc que la fonction  $f_1$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

**2ème solution.** La fonction  $g : x \mapsto -x$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et la fonction  $f_0 : y \mapsto f_0(y)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la fonction  $f_1 = f_0 \circ g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

c) Pour tout réel  $x$ , le point de  $\mathcal{C}_0$  d'abscisse  $x$  a même ordonnée que le point de  $\mathcal{C}_1$  d'abscisse  $-x$ . Ceci signifie que

Les courbes  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4) **Etude de la fonction  $f_n$  pour  $n \geq 2$ .**

a) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel  $x$ ,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{e^{nx}(1 + e^{-x})} = \frac{1}{e^{nx} + e^{nx-x}} = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

b) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Puisque  $n > 0$  et  $n - 1 > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{nx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et de même  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(n-1)x} = 0$ . Par suite,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{nx} + e^{(n-1)x}) = 0$ . Comme de plus, pour tout réel  $x$ ,  $e^{nx} + e^{(n-1)x} > 0$ , on a montré que

$$\text{pour tout entier naturel } n \geq 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty.$$

• Puisque  $n > 0$  et  $n - 1 > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{nx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et de même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(n-1)x} = +\infty$ . Par suite,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{nx} + e^{(n-1)x}) = +\infty$  et donc

$$\text{pour tout entier naturel } n \geq 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

c) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ . De plus pour tout réel  $x$

$$f'_n(x) = -\frac{ne^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2}.$$

Or,  $n > 0$ ,  $n - 1 > 0$  et pour tout réel  $x$ ,  $e^{nx} > 0$ ,  $e^{(n-1)x} > 0$  et  $(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2 > 0$ . Par suite, pour tout réel  $x$ ,  $f'_n(x) < 0$ . On en déduit le tableau de variation de la fonction  $f_n$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	
$f_n$	$+\infty$	$0$

**Partie B - Etude d'une suite liée aux fonctions  $f_n$ .**

1) La fonction  $x \mapsto \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  avec  $u(x) = 1 + e^{-x}$ . Une primitive de cette fonction sur  $\mathbb{R}$  est la fonction  $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$ . Par suite,

$$u_1 = \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = [-\ln(1 + e^{-x})]_0^1 = -\ln(1 + e^{-1}) + \ln(1 + e^0) = \ln(2) - \ln(1 + e^{-1}).$$

Ensuite,

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 1 dx = 1 \times 1 = 1,$$

et donc

$$u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln(2) + \ln(1 + e^{-1}).$$

$$u_0 = 1 - \ln(2) + \ln(1 + e^{-1}) \text{ et } u_1 = \ln(2) - \ln(1 + e^{-1}).$$

2) Soit  $n$  un entier naturel.

Soit  $x$  un réel de  $[0, 1]$ ,  $1 + e^{-x} \geq 1 > 0$  et donc  $0 \leq \frac{1}{1 + e^{-x}} \leq 1$ . On multiplie alors les trois membres de cet encadrement par le réel positif  $e^{-nx}$  et on obtient

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], 0 \leq \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} \leq e^{-nx}.$$

Par positivité et croissance de l'intégration, on en déduit que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx \leq \int_0^1 e^{-nx} dx.$$

On a montré que

$$\text{pour tout entier naturel } n, 0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx.$$

3) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$\int_0^1 e^{-nx} dx = \int_0^1 -\frac{1}{n} \times (-ne^{-nx}) dx = \left[ -\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n} e^0 = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

Maintenant,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-nx} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n} = 0$ . En tenant compte de l'encadrement de la question 2), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$