BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

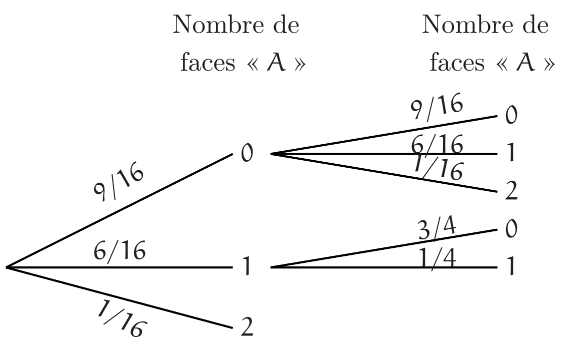
Antilles Guyane

EXERCICE 1

1) Il y a $4 \times 4 = 16$ cas possibles, tous équiprobables. Parmi ces 16 issues possibles, il y a $3 \times 3 = 9$ cas où la lettre A n'apparaît pas, $1 \times 1 = 1$ cas où la lettre A apparaît deux fois et donc $16 - 9 - 1 = 6$ cas où la lettre A apparaît exactement une fois. Donc

$$\boxed{p(E_0) = \frac{9}{16},\ p(E_1) = \frac{6}{16} \text{ et } p(E_2) = \frac{1}{16}.}$$

2) a) Représentons la situation par un arbre.



b) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité cherchée est

$$\frac{9}{16} \times \frac{1}{16} + \frac{6}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{9}{256} + \frac{6}{64} + \frac{1}{16} = \frac{9 + 24 + 16}{256} = \frac{49}{256}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité de gagner est de } \frac{49}{256}.}$$

c) Le gain algébrique est 5 euros si le A sort deux fois avec une probabilité de $\dfrac{49}{256}$ et de -5 euros si le A ne sort pas avec une probabilité de $\dfrac{9}{16} \times \dfrac{9}{16} = \dfrac{81}{256}$. Enfin, ce gain est de 0 euro dans le dernier cas. Le gain algébrique moyen est donc

$$E(X) = \frac{49}{256} \times 5 + \left(1 - \frac{49}{256} - \frac{81}{256}\right) \times 0 + \frac{81}{256} \times (-5) = 5\left(\frac{49}{256} - \frac{81}{256}\right) < 0.$$

Puisque le gain algébrique moyen est strictement négatif, le jeu est défavorable au joueur.

EXERCICE 2

1) Soit M un point du plan.

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow |z-3| = |z+4i| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB],$$

et donc

$$\boxed{\text{l'affirmation 1 est vraie.}}$$

2) Puisque les points A, B et C sont deux à deux distincts

$$\frac{c-a}{b-a} = 2i \Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(2i)\ [2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Rightarrow BAC \text{ rectangle en } A$$

et donc le point A appartient au cercle de diamètre $[BC]$. Par suite,

$$\boxed{\text{l'affirmation 2 est vraie.}}$$

3) $z^{2009} = 2^{2009} e^{\frac{2009i\pi}{7}}$. Maintenant, $2009 = 143 \times 14 + 7$ puis

$$e^{\frac{2009i\pi}{7}} = e^{\frac{(143\times 14+7)i\pi}{7}} = e^{i143\times 2\pi + i\pi} = e^{i\pi} = -1,$$

et finalement $z^{2009} = -2^{2009}$.

$$\boxed{\text{L'affirmation 3 est fausse.}}$$

4) Soit M un point de l'espace.

$$M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6 \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6 \Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6 \Leftrightarrow MG = 2.$$

Donc $\mathscr{F}$ est la sphère de centre G et de rayon 2 et

$$\boxed{\text{l'affirmation 4 est vraie.}}$$

5) $\mathscr{S}$ est la sphère de centre O et de rayon $R = \sqrt{5}$. La distance d du point O au plan $\mathscr{P}$ est

$$d = \frac{|0+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Puisque $d^2 = \frac{5}{4}$ et $R^2 = 5$, on a $d < R$ et on sait alors que l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est un cercle.

$$\boxed{\text{L'affirmation 5 est vraie.}}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) Soient a un réel non nul et b un réel. On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{at} - \dfrac{b}{a}$. Ici l'équation différentielle s'écrit $y' = -\dfrac{1}{2}y + 10$ et donc $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 10$. Donc il existe un réel K tel que pour tout réel t, $f(t) = Ke^{-\frac{t}{2}} + 20$. La condition $f(0) = 220$ fournit $Ke^0 + 20 = 220$ et donc $K = 200$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t,\ f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20.}$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

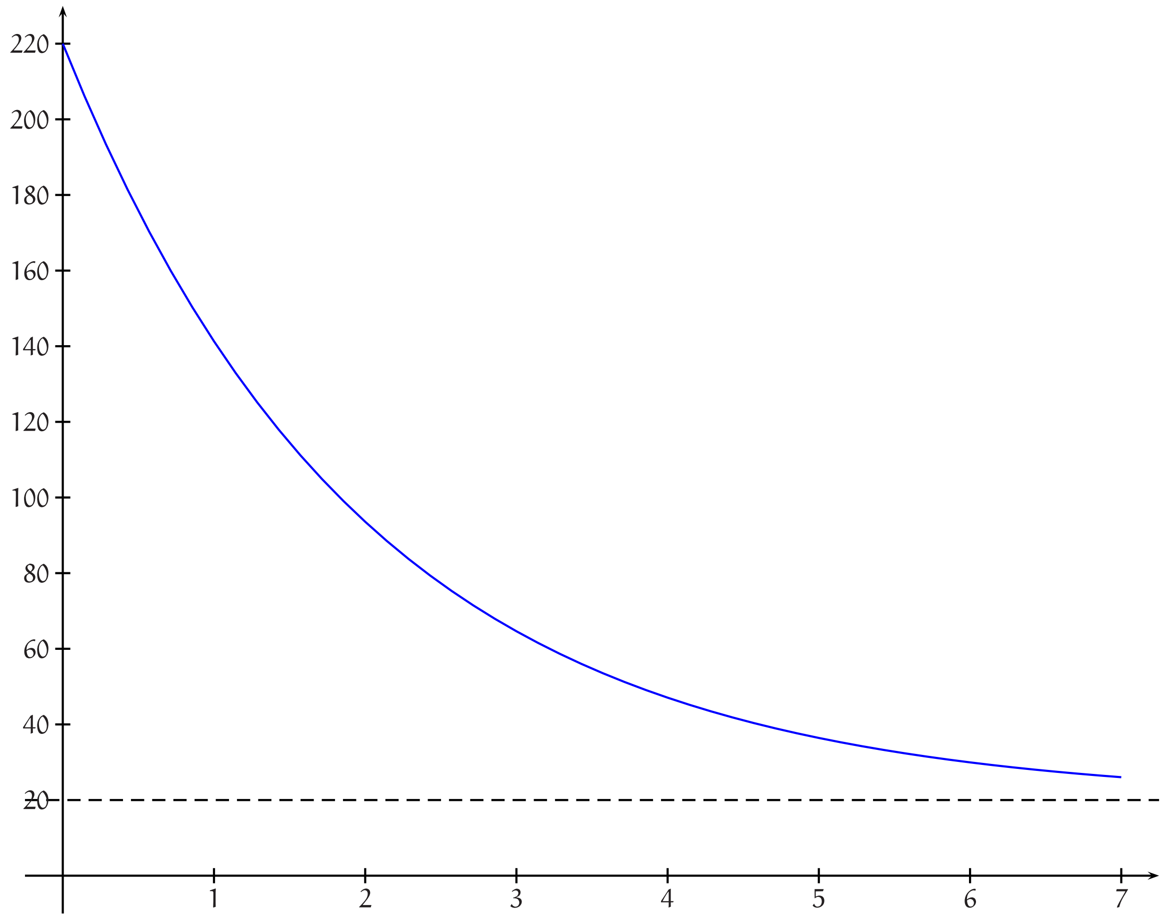
$$f'(t) = 200 \times \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right) = -100e^{-\frac{t}{2}}.$$

Pour tout réel t, $e^{-\frac{t}{2}} > 0$ et donc pour tout réel positif t, $f'(t) < 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[.}$$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$. On en déduit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 20$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c) Graphique.



Partie B

1) a) $d_0 = f(0) - f(1) = 200(1 - e^{-1/2}) = 78,7$ arrondi au dixième. $d_1 = f(1) - f(2) = 200(e^{-1/2} - e^{-1}) = 47,7$ arrondi au dixième. $d_2 = f(2) - f(3) = 200(e^{-1} - e^{-3/2}) = 28,9$ arrondi au dixième.

b) Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 20$, $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 20 - 20 = 0$.

2) Pour tout entier naturel n, $d_n = (200e^{-n/2}+20)-(200e^{-(n+1)/2}+20) = 200(e^{-n/2}-e^{-(n+1)/2}) = 200(1-e^{-1/2})e^{-n/2}$.
Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
d_n \leqslant 5 &\Leftrightarrow 200(1-e^{-1/2})e^{-n/2} \leqslant 5 \Leftrightarrow 200(1-e^{-1/2}) \times \frac{1}{e^{n/2}} \leqslant 5 \Leftrightarrow 40(1-e^{-1/2}) \leqslant e^{n/2} \text{ (car } e^{n/2} > 0)\\
&\Leftrightarrow \ln\left(e^{n/2}\right) \geqslant \ln\left(40(1-e^{-1/2})\right) \text{ (car la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 2\ln\left(40(1-e^{-1/2})\right) \Leftrightarrow n \geqslant 5,5\ldots\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 6 \text{ (car } n \text{ est un entier naturel).}
\end{aligned}$$

La plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de la température est inférieur à 5°C est 6.

EXERCICE 4

1) **a)** La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Pour tout réel positif x, $f'(x) \geqslant 0$ et donc la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant f(0)$ ou encore $x - \ln(1+x) \geqslant 0$ et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } x,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul. $\ln(u_n) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Le réel $x = \frac{1}{n}$ est positif et d'après la question précédente, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif n, on obtient $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ ou encore $\ln(u_n) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ \ln(u_n) \leqslant 1.}$$

c) Pour tout entier naturel non nul n, on a $\ln(u_n) \leqslant 1$ et donc par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{\ln(u_n)} \leqslant e^1$ ou encore

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n \leqslant e.$$

Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell \leqslant e$. On ne peut donc avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) **a)** Soit n un entier naturel non nul. $v_n = \ln(u_n) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$ où $x = \frac{1}{n}$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Or quand n tend vers $+\infty$, $x = \frac{1}{n}$ tend vers 0 et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.}$$

c) Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = e^{v_n}$. On en déduit que la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

