Session 2008

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$;
unité graphique : 4cm.

On considère le point A d'affixe $z_A = 2+i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2. a) Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $\left(O; \vec{u}\right)$.

   b) On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
   Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$.

   a) Calculer le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

   b) Interpréter géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

4. On note (Γ') le cercle de diamètre [AB].
   La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

   a) Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

   b) Déterminer l'affixe du point N.

5. On désigne par M' l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   a) Déterminer l'affixe du point M'.

   b) Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ').

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j},\,\vec{k})$.
On nomme (S) la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

1 . Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

2 . On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3; 1 ;-3) et (-1 ; 1 ; 1).
 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
 b) Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3 . Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).

4 . a) On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation z = 68. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

 b) M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
 On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a;b)=440$, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système (1) : $\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ \text{ppcm}(a;b)=440 \end{cases}$

 Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a;\,b)$ est égal à 1 ou 5.
 Conclure.

 Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞ [par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 . Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

2 . a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$. Interpréter graphiquement cette limite.

b) Préciser les positions relatives de (C) et de Γ .

3 . On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle]1 ; + ∞[.

Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - a f'(a) = 0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞[par $g(x) = f(x) - x f'(x)$.

b) Montrer que sur]1 ; +∞[, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$. ont les mêmes solutions.

c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur **R** par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur **R**.

d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

La courbe (C) et la courbe Γ sont données en annexe, page 6.

Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.

Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle]1 ;10].

Exercice 4 (4 points)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt.$$

1. a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

   b) Étudier les variations de la suite (x_n).

   c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   b) En déduire la limite de la suite (x_n).

3. a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n y_n$.

Annexe

Cette page est à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 3

Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur.

Légende :

—— courbe Γ représentative de la fonction ln

--- courbe (C) représentative de la fonction f