EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ et H la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\ dt$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1; +\infty[$.

b. Quelle relation existe-t-il entre f et H ?

c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. du plan. Interprétez en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{e^x - 1} = x\dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\ dx = 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx$.

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) \leq \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx \leq \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx$ puis de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\ dx$.