BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichéry

EXERCICE 1

1) a. Soit $x \geq 1$. En particulier, $x > 0$ et donc $e^x > 1$ puis $e^x - 1 \neq 0$.
• On en déduit que la fonction f est bien définie sur $[1;+\infty[$.
• De plus, la fonction f est continue sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[1;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1;+\infty[$. Mais alors, la fonction H est bien définie sur $[1;+\infty[$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } H \text{ sont bien définies sur } [1;+\infty[.}$$

b. H est la primitive de f sur $[1;+\infty[$ qui s'annule en 1. Donc

$$\boxed{H \text{ est dérivable sur } [1;+\infty[\text{ et } H' = f.}$$

c. Pour $x \in [1;3]$, on a $x > 0$ et donc $e^x - 1 > 0$ puis $\dfrac{x}{e^x - 1} > 0$. Par suite, f est positive sur $[1;3]$. Le nombre $H(3)$ est donc l'aire du domaine $\mathscr{D}$ constitué des points M de coordonnées $(x;y)$ tels que $1 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

2) a. Soit $x \in [1;3]$. $e^x \neq 0$ et on peut donc écrire

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)} = x\frac{\dfrac{1}{e^x}}{1 - \dfrac{1}{e^x}} = x\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

b. Pour $x \in [1;3]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1 - e^{-x})$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[1;3]$ et pour $x \in [1;3]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \ln(1 - e^{-x}) \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \end{array}$$

De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x)\ dx &= \int_1^3 x\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\ dx \\ &= \left[x\ln(1 - e^{-x})\right]_1^3 - \int_1^3 1 \times \ln(1 - e^{-x})\ dx = 3\ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x})\ dx. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^3 f(x)\ dx = 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x})\ dx.}$$

c. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est croissante sur $]0; +\infty[$. Donc pour x réel,

$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1} \Rightarrow 1-e^{-1} \leq 1-e^{-x} \leq 1-e^{-3} \Rightarrow \ln(1-e^{-1}) \leq \ln(1-e^{-x}) \leq \ln(1-e^{-3})$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1;3],\ \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \ln(1-e^{-x}) \leq \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right).}$$

d. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\int_1^3 dx \leq \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\, dx \leq \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)\int_1^3 dx,$$

ou encore $2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\, dx \leq 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$. Mais alors à partir de la formule de la question b.,

$$3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) \leq \int_1^3 f(x)\, dx \leq 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 f(x)\, dx \leq 3\left[\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right].}$$

A l'aide de la calculatrice, on obtient encore

$$\boxed{0,4 \leq \int_1^3 f(x)\, dx \leq 1,2.}$$

