

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et H la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par

$$H(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

- a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1; +\infty[$.
- b. Quelle relation existe-t-il entre f et H ?
- c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . du plan. Interprétez en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x - 1} = x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. En déduire que $\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$.

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln \left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln \left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$ puis de $\int_1^3 f(x) dx$.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichéry

EXERCICE 1

1) a. Soit $x \geq 1$. En particulier, $x > 0$ et donc $e^x > 1$ puis $e^x - 1 \neq 0$.

• On en déduit que la fonction f est bien définie sur $[1; +\infty[$.

• De plus, la fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[1; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1; +\infty[$. Mais alors, la fonction H est bien définie sur $[1; +\infty[$.

Les fonctions f et H sont bien définies sur $[1; +\infty[$.

b. H est la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en 1. Donc

H est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $H' = f$.

c. Pour $x \in [1; 3]$, on a $x > 0$ et donc $e^x - 1 > 0$ puis $\frac{x}{e^x - 1} > 0$. Par suite, f est positive sur $[1; 3]$. Le nombre $H(3)$ est donc l'aire du domaine \mathcal{D} constitué des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que $1 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

2) a. Soit $x \in [1; 3]$. $e^x \neq 0$ et on peut donc écrire

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = x \frac{\frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

b. Pour $x \in [1; 3]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1 - e^{-x})$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[1; 3]$ et pour $x \in [1; 3]$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v(x) &= \ln(1 - e^{-x}) \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \end{aligned}$$

De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[1; 3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= [x \ln(1 - e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 1 \times \ln(1 - e^{-x}) dx = 3 \ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx. \end{aligned}$$

$$\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx.$$

c. La fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} et la fonction \ln est croissante sur $]0; +\infty[$. Donc pour x réel,

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1} \Rightarrow 1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - e^{-3} \Rightarrow \ln(1 - e^{-1}) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln(1 - e^{-3}).$$

$$\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1; 3], \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

d. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \int_1^3 dx \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \int_1^3 dx,$$

ou encore $2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$. Mais alors à partir de la formule de la question b.,

$$3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right),$$

ce qui s'écrit

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \left[\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \right].$$

A l'aide de la calculatrice, on obtient encore

$$0,4 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 1,2.$$