BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 3 - 2i$, $b = 3 + 2i$, $c = 4i$.

2. Faire une figure et placer les points A, B, C.
3. Montrer que OABC est un parallélogramme.
4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.
5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$.
6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M.

   On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Montrer que N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

   b) Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

EXERCICE 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,2,3)$, $B(0,1,4)$, $C(-1,-3,2)$, $D(4,-2,5)$ et le vecteur $\vec{n}(2,-1,1)$.

1. a) Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

   b) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c) Déterminer une équation du plan (ABC).

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

   Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

   Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit f la fonction solution sur **R** de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

   Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ ».

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A, +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

   Proposition 2 : « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$ ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.
   Sa masse initiale est de 10 kg.
   Proposition 3 : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 g ».

4. Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

   Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) = 0,4$ alors $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.
   On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.
   Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 ».

EXERCICE 4 (7 points)

Partie A

Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et si, pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C ainsi que la droite D d'équation $y=x$ sont données en annexe dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0,+\infty[$.
2. a) Montrer que la courbe C admet pour asymptote la droite D.

   b) Étudier la position de C par rapport à D.
3. Soit I l'intégrale définie par : $\mathrm{I} = \int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x)-x]\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer I.

   a) Donner une interprétation géométrique de I.

   b) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\ln(1+t) \leqslant t$.

   (On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t) = \ln(1+t) - t$)

   On admettra que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\frac{t}{t+1} \leqslant \ln(1+t)$.

   c) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$, on a : $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

   d) Montrer que $\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right) \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1-\mathrm{e}^{-1}$.

   e) En déduire un encadrement de I d'amplitude $0,4$ par deux nombres décimaux.
4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à C et D.

On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie

EXERCICE 4