

EXERCICE 4 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B. Restitution organisée de connaissances

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

On note \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

On prendra 4 cm pour unité graphique.

1) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Etudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variation le plus complet possible.

2) Tracer la courbe \mathcal{C} . On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

Partie C. Etude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k , on note f_k la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = (x + 1)e^{kx}.$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la **partie B**, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$.

1) a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

b) Déterminer les points d'intersection des courbes \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_1 .

Vérifier que, pour tout entier k , ces points appartiennent à la courbe \mathcal{C}_k .

2) Etudier, suivant les valeurs du réel x , le signe de l'expression :

$$(x + 1)(e^x - 1).$$

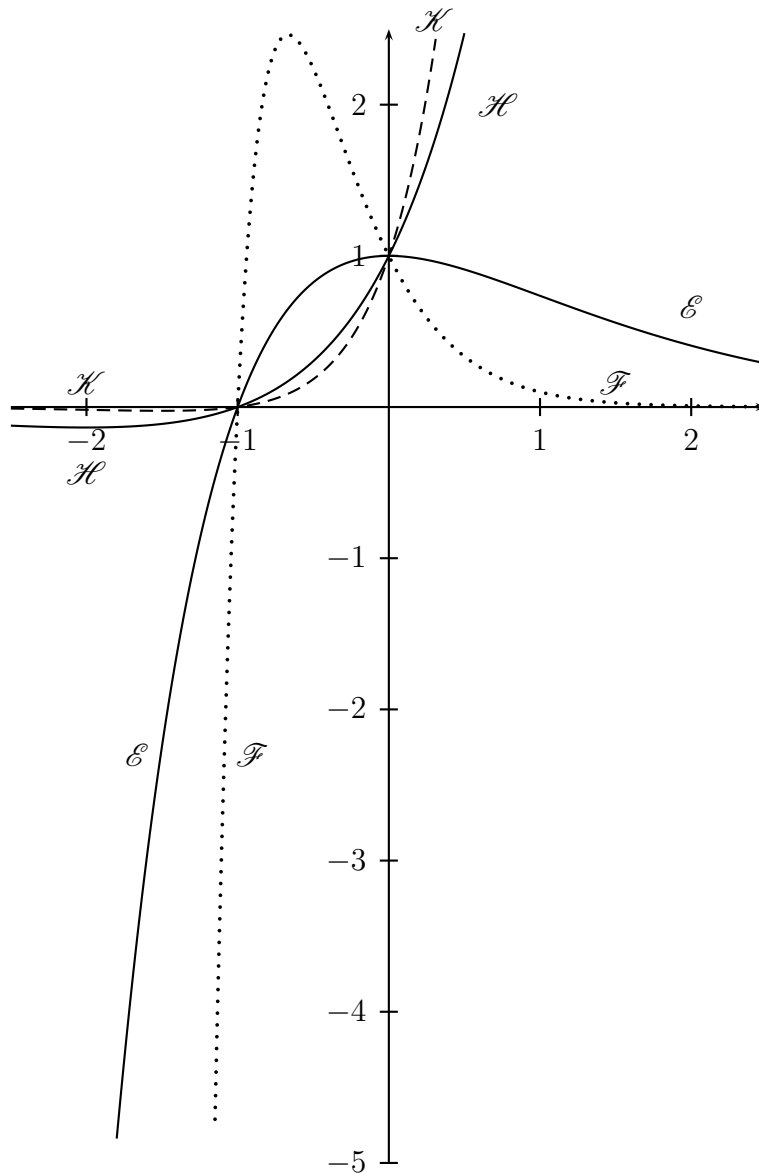
En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes \mathcal{C}_k et \mathcal{C}_{k+1} .

3) Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k .

(On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

- 4) Le graphique suivant représente quatre courbes \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{H} et \mathcal{K} , correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k , parmi les entiers $-1, -3, 1$ et 2 . Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Partie D. Calcul d'une aire plane

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est celle définie dans la **partie B**.

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer le nombre :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t) dt.$$

- 2) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.