EXERCICE 4

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Pour tout réel non nul x, on a $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B. Etude d'une fonction

1) • Dérivée.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-1) \times e^{-x} = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

• Signe de f' et sens de variation de f.
Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$. On en déduit que pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $-x$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur $]-\infty, 0[$, strictement négative sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

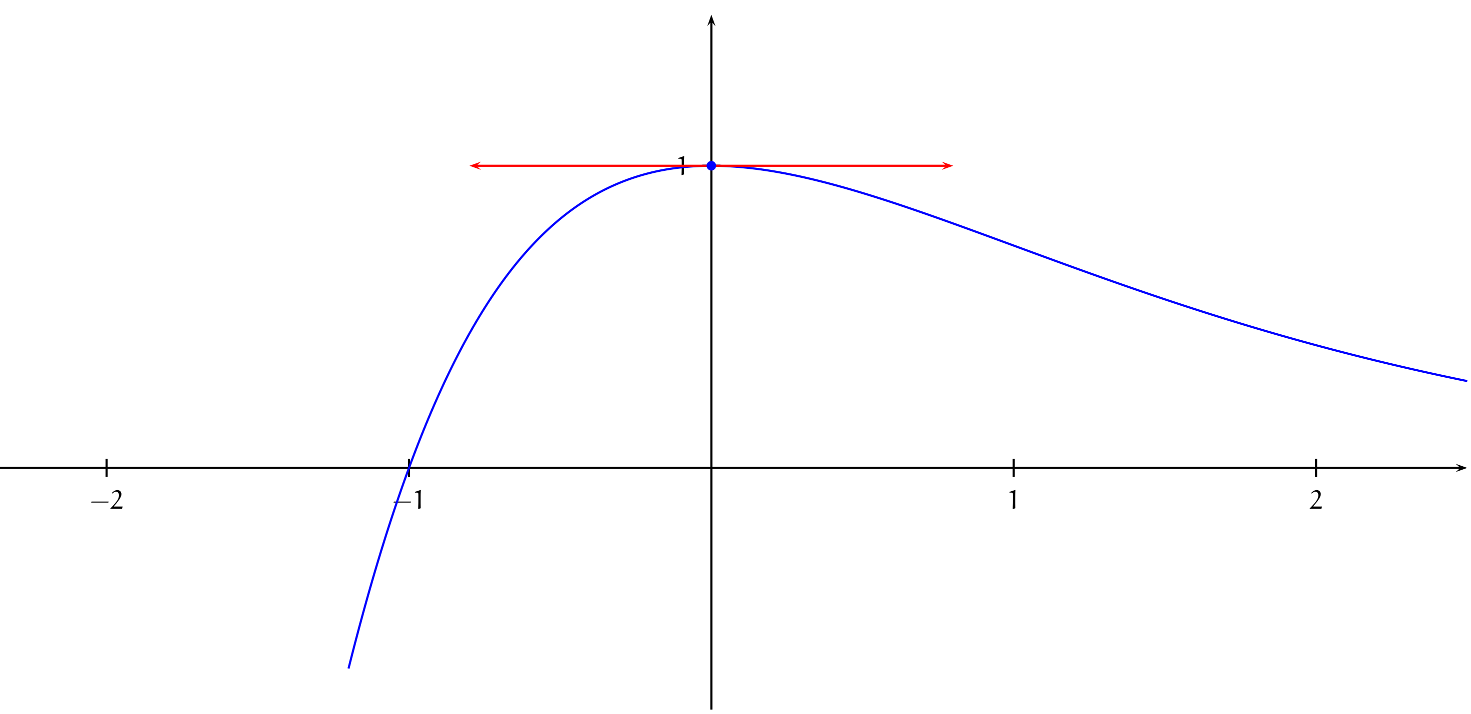
• Limite de f en $-\infty$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{-x} = -\infty$.

• Limite de f en $+\infty$.
Pour tout réel x, on a $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et d'autre part, d'après le théorème de croissances comparées rappelé dans la partie A, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0$.

• Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2)



Partie C. Etude d'une famille de fonctions

1) a) Pour tout réel x, on a $f_0(x) = (x+1)e^0 = x+1$. f_0 est donc une fonction affine.

b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont les solutions de l'équation $f_0(x) = f_1(x)$. Or, pour tout réel x,

$$f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow x+1 = (x+1)e^x \Leftrightarrow (x+1)(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0.$$

Maintenant, $f_0(-1) = f_1(-1) = 0$ et $f_0(0) = f_1(0) = 1$. Par suite

Les points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont les points $A(-1, 0)$ et $B(0, 1)$.

Soit k un entier relatif. $f_k(x_A) = f_k(-1) = (-1+1)e^{-k} = 0 = y_A$ et $f_k(x_B) = f_k(0) = (0+1)e^0 = 1 = y_B$. Donc

Les points $A(-1, 0)$ et $B(0, 1)$ appartiennent à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$, $k \in \mathbb{R}$.

2) Etudions le signe de $(x+1)(e^x - 1)$ dans un tableau.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit k un entier relatif. La position relative de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ est fournie par le signe de $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ suivant les valeurs de x. Or pour tout réel x,

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} = (x+1)e^{kx} \times e^x - (x+1)e^{kx} = (x+1)(e^x - 1)e^{kx}.$$

Comme pour tout réel x, on a $e^{kx} > 0$, $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ est du signe de $(x+1)(e^x - 1)$ pour tout réel x. Ce signe a été étudié plus haut et on en déduit que

pour tout entier relatif k, $\mathscr{C}_{k+1}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_k$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 1[$, et enfin $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ se coupent aux points $A(-1, 0)$ et $B(0, 1)$.

3) Soit k un entier relatif non nul. f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f_k'(x) = 1 \times e^{kx} + (x+1) \times k \times e^{kx} = (1 + k(x+1))\, e^{kx} = (kx + k + 1)e^{kx}.$$

Pour tout réel x, on a $e^{kx} > 0$. Par suite, pour tout réel x, $f_k'(x)$ est du signe de $kx + k + 1$. Le signe d'une fonction affine étant connu, on en déduit le tableau de variations de f suivant les valeurs de k :

$k < 0$

x	$-\infty$		$-(k+1)/k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k		$\nearrow$	$-\dfrac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\searrow$	

$k > 0$

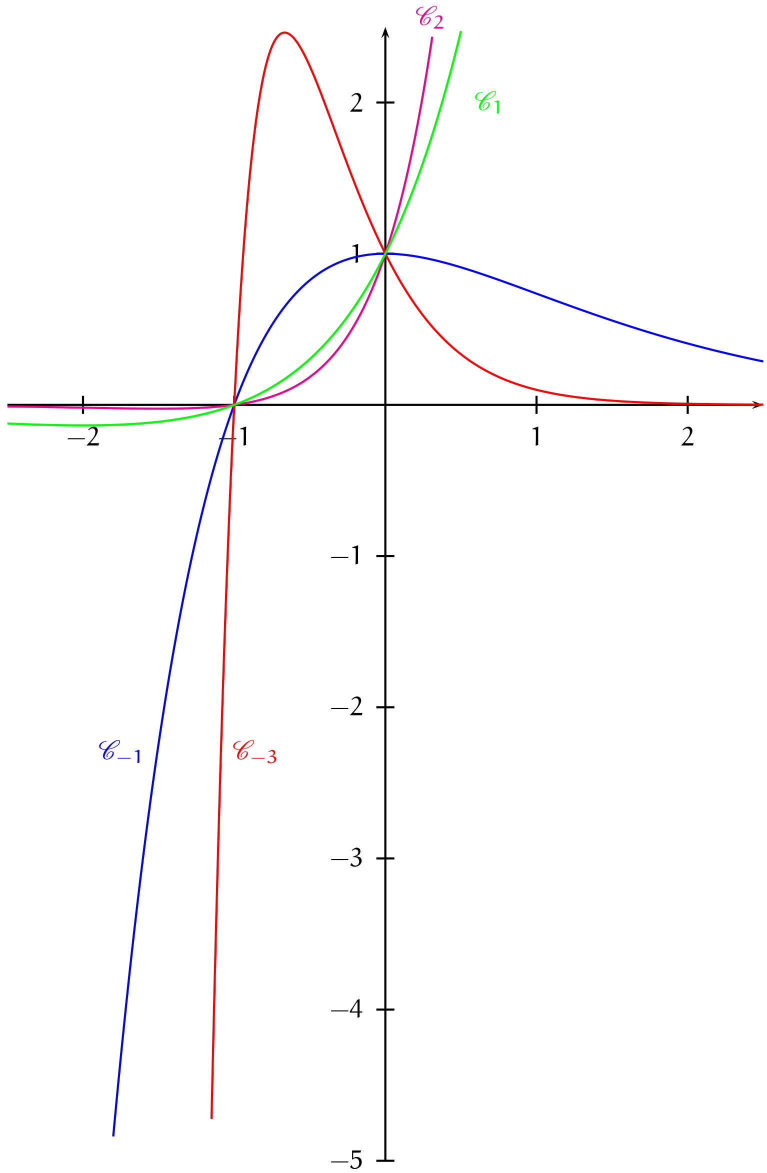
x	$-\infty$		$-(k+1)/k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k		$\searrow$	$-\dfrac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\nearrow$	

$$f\left(-\frac{k+1}{k}\right) = \left(-\frac{k+1}{k} + 1\right) e^{k \times (-(k+1)/k} = -\frac{e^{-(k+1)}}{k}.$$

4) $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont dans le cas $k < 0$ et d'après la partie B, $\mathscr{E} = \mathscr{C}_{-1}$. Donc $\mathscr{F} = \mathscr{C}_{-3}$.
Ensuite, $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_1$ sur $]0, +\infty[$ et donc $\mathscr{K} = \mathscr{C}_2$ et $\mathscr{H} = \mathscr{C}_1$.

$\mathscr{E} = \mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{F} = \mathscr{C}_{-3}$, $\mathscr{H} = \mathscr{C}_1$ et $\mathscr{K} = \mathscr{C}_2$.

Graphique.



Partie D. Calcul d'une aire plane

1) Soit $\lambda > 0$ Les deux fonctions $u\ :\ x \mapsto x+1$ et $v\ :\ x \mapsto -e^{-x}$ sont définies et dérivables sur le segment $[0, \lambda]$ et pour tout réel x de $[0, \lambda]$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[0, \lambda]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{array}{ll} u(x) = x+1 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda (x+1)e^{-x}\ dx &= \left[(x+1)\times(-e^{-x})\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda 1\times(-e^{-x})\ dx = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + (0+1)e^0 + \int_0^\lambda e^{-x}\ dx \\ &= -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 + \left[-e^{-x}\right]_0^\lambda = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 + (-e^{-\lambda}+1) = 2-(\lambda+2)e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \lambda,\ \int_0^\lambda f(x)\ dx = 2-(\lambda+2)e^{-\lambda}.}$$

2) Pour tout réel λ, on a $\mathscr{A}(\lambda) = 2 - \lambda e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda}$. Or, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}(\lambda) = 2.}$$

La fonction f est continue et positive sur le segment $[0, 1]$. Donc $\mathscr{A}(\lambda)$ est l'aire du domaine du plan compris entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f, exprimée en unités d'aires.
$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}(\lambda)$ est donc l'aire du domaine infini compris entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe représentative de f.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'aire du domaine infini compris entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe représentative de } f \\ \text{est égale à 2 unités d'aire.}\end{array}}$$