EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

2) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E').

3) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4) En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ d'unité 1 cm.

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variation de f.

4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

5) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Déterminer l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.