BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Antilles Guyanne

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour $a \in \mathbb{R}$ donné, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$. Ici $a = -2$ et donc

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto ke^{-2x},\ k \in \mathbb{R}.}$$

2) En particulier, quand $k = \dfrac{9}{2}$ on obtient

$$\boxed{\text{la fonction } k\ :\ x \mapsto \frac{9}{2}e^{-2x} \text{ est solution de l'équation } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$g'(x) + 2g(x) = -3 \times (-3e^{-3x}) + 2 \times (-3e^{-3x}) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } g\ :\ x \mapsto -3e^{-3x} \text{ est solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$f'(x) + 2f(x) = (g + h)'(x) + 2(g + h)(x) = (g'(x) + 2g(x)) + (h'(x) + 2h(x)) = 3e^{-3x} + 0 = 3e^{-3x},$$

et donc

$$\boxed{f \text{ est solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Partie B

1) Pour tout réel x, on a $3e^{-2x} \neq 0$ et donc

$$f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 3e^{-2x}\frac{\frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}}{3e^{-2x}} = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-3x+2x}\right) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right).$$

2) • **Limite en $+\infty$.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{9}{2} \times 0 - 3 \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

• **Limite en $-\infty$.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{-2x} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$.

En résumé, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{9}{2} \times (-2e^{-2x}) - 3 \times (-3e^{-3x}) = -9e^{-2x} + 9e^{-3x} = 9e^{-3x}(-e^{x} + 1).$$

Pour tout réel x, $9e^{-3x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-e^{x} + 1$. Or

- si $x > 0$, $e^{x} > 1$ et donc $f'(x) < 0$,
- si $x = 0$, $e^{x} = 1$ et donc $f'(x) = 0$,
- si $x < 0$, $e^{x} < 1$ et donc $f'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	0

$$f(0) = \frac{9}{2}e^{0} - 3e^{0} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

4) • $f(0) = \frac{3}{2}$ et donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Oy) au point de coordonnées $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

• Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe (Ox) sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 3e^{-3x}\left(\frac{3}{2}e^{x} - 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{x} - 1 = 0 \text{ (car } 3e^{-3x} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow e^{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}$$

$\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Ox) au point de coordonnées $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right)$.

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ coupe l'axe } (Ox) \text{ au point de coordonnées } \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right) \text{ et l'axe } (Oy) \text{ au point de coordonnées } \left(0, \frac{3}{2}\right).}$$

5) $f(1) = \frac{9}{2}e^{-2} - 3e^{-3} = 0,459\ldots$
Voir graphique page suivante.

6) L'unité d'aire est égale à 1 cm^2.
La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$. On en déduit que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus, f est continue sur cet intervalle et donc $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\ dx &= \left[\frac{9}{2}\times\frac{e^{-2x}}{-2} - 3\times\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^1 = \left[-\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x}\right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3}\right) - \left(-\frac{9}{4} + 1\right) = \frac{5}{4} - \frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{5}{4} - \frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} = 0,995\ldots\ \text{cm}^2.}$$