

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Partie A

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$.

- 1) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$.
- 2) En déduire que la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E') .
- 3) Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E) .
- 4) En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E) .

Partie B

On nomme \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1 cm.

- 1) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} on a : $f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$.
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
- 3) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variation de f .
- 4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec les axes du repère.
- 5) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_f .
- 6) Déterminer l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2 .

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Antilles Guyanne

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour $a \in \mathbb{R}$ donné, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$. Ici $a = -2$ et donc

les solutions de l'équation (E') sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

2) En particulier, quand $k = \frac{9}{2}$ on obtient

la fonction $k : x \mapsto \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de l'équation (E') sur \mathbb{R} .

3) La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x on a

$$g'(x) + 2g(x) = -3 \times (-3e^{-3x}) + 2 \times (-3e^{-3x}) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}.$$

Donc

la fonction $g : x \mapsto -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E) sur \mathbb{R} .

4) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x on a

$$f'(x) + 2f(x) = (g + h)'(x) + 2(g + h)(x) = (g'(x) + 2g(x)) + (h'(x) + 2h(x)) = 3e^{-3x} + 0 = 3e^{-3x},$$

et donc

f est solution de l'équation (E) sur \mathbb{R} .

Partie B

1) Pour tout réel x , on a $3e^{-2x} \neq 0$ et donc

$$f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 3e^{-2x} \frac{9e^{-2x} - 3e^{-3x}}{3e^{-2x}} = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-3x+2x} \right) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right).$$

2) • **Limite en $+\infty$.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{9}{2} \times 0 - 3 \times 0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

• **Limite en $-\infty$.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{-2x} = +\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$.

En résumé, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{-2x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{9}{2} \times (-2e^{-2x}) - 3 \times (-3e^{-3x}) = -9e^{-2x} + 9e^{-3x} = 9e^{-3x}(-e^x + 1).$$

Pour tout réel x , $9e^{-3x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-e^x + 1$. Or

- si $x > 0$, $e^x > 1$ et donc $f'(x) < 0$,
- si $x = 0$, $e^x = 1$ et donc $f'(x) = 0$,
- si $x < 0$, $e^x < 1$ et donc $f'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
f	$-\infty$	$\nearrow \frac{3}{2}$	$\searrow 0$

$$f(0) = \frac{9}{2}e^0 - 3e^0 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

4) • $f(0) = \frac{3}{2}$ et donc \mathcal{C}_f coupe l'axe (Oy) au point de coordonnées $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

• Les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f et de l'axe (Ox) sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 3e^{-3x} \left(\frac{3}{2}e^x - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}e^x - 1 = 0 \text{ (car } 3e^{-3x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

\mathcal{C}_f coupe l'axe (Ox) au point de coordonnées $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right)$.

\mathcal{C}_f coupe l'axe (Ox) au point de coordonnées $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right)$ et l'axe (Oy) au point de coordonnées $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

5) $f(1) = \frac{9}{2}e^{-2} - 3e^{-3} = 0,459\dots$

Voir graphique page suivante.

6) L'unité d'aire est égale à 1 cm^2 .

La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$. On en déduit que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus, f est continue sur cet intervalle et donc $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx$.

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 f(x) \, dx = \left[\frac{9}{2} \times \frac{e^{-2x}}{-2} - 3 \times \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^1 = \left[-\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x} \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} \right) - \left(-\frac{9}{4} + 1 \right) = \frac{5}{4} - \frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{5}{4} - \frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} = 0,995\dots \text{ cm}^2.$$

