BACCALAUREAT GENERAL

Session 2007

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Rochambeau

EXERCICE 1

Proposition 1	**Faux**
Proposition 2	**Vrai**
Proposition 3	**Vrai**

Explications.

1) Notons H' le point de coordonnées $(1, 11, 7)$. Un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -3)$ et le vecteur $\overrightarrow{H'A}$ a pour coordonnées $(1, 9, 6)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{H'A}$ ne sont pas colinéaires et donc la droite $(H'A)$ n'est pas perpendiculaire au plan (P). Par suite, H' n'est pas le projeté orthogonal H du point A sur le plan (P).

2) Soient a et b deux réels, a étant non nul. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ sont donc les fonctions de la forme $f\ :\ x \mapsto Ce^{-2x} + 1$, $C \in \mathbb{R}$. De plus,

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^0 + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -1.$$

Par suite, pour tout réel x on a $u(x) = -e^{-2x} + 1$. Mais alors

$$u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = -e^{-\ln 2} + 1 = 1 - \frac{1}{e^{\ln 2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 7$.

• Puisque $u_0 = 2$, le résultat est vrai pour $n = 0$.
• Soit $n \geq 0$. Supposons que u_n existe et $0 \leq u_n \leq 7$. Alors u_{n+1} existe (car $7u_n \geq 0$), u_{n+1} est positif (car $\sqrt{7u_n} \geq 0$) et enfin $u_{n+1} = \sqrt{7u_n} \leq \sqrt{7 \times 7} = 7$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 7$.

EXERCICE 2

1) Soient a et b deux nombres complexes, a étant non nul et distinct de 1. On sait que la transformation d'écriture complexe $z' = az + b$ est la similitude plane directe de centre d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle un argument de a. Ici, $a = 2 - 2i$ et $b = 1$.

- $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1}{-1+2i} = \dfrac{-1-2i}{(-1+2i)(-1-2i)} = \dfrac{-1-2i}{(-1)^2+2^2} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$. Le centre de f est donc le point $\Omega(-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{2}{5})$.
- $a = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Par suite, le rapport de f est $|a|$ ou encore $2\sqrt{2}$ et l'angle de f est un argument de a comme $-\dfrac{\pi}{4}$.

$$\boxed{f \text{ est la similitude plane directe de centre } \Omega(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}), \text{ de rapport } 2\sqrt{2} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{4}.}$$

2) **a)** $z_{B'} = (2-2i)z_B + 1 = (2-2i)(-4+2i) + 1 = -8 + 4 + 8i + 4i + 1 = -3 + 12i.$

$$\boxed{z_{B'} = -3 + 12i.}$$

b) Les points A, B' et C ont respectivement pour coordonnées $(3, 5)$, $(-3, 12)$ et $(1, 4)$. Donc les coordonnées de $\overrightarrow{CA}$ sont $(2, 1)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{CB'}$ sont $(-4, 8)$. Par suite,

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'} = 2 \times (-4) + 1 \times 8 = 0.$$

Finalement,

$$\boxed{\text{les droites } (CA) \text{ et } (CB') \text{ sont orthogonales.}}$$

3) Déterminons les coordonnées du point M'.

$$z' = (2-2i)(x+iy) + 1 = 2x + 2y - 2ix + 2iy + 1 = (2x + 2y + 1) + i(-2x + 2y).$$

Les coordonnées du point M' sont donc $(2x + 2y + 1, -2x + 2y)$. Mais alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM'}$ sont $(2x + 2y, -2x + 2y - 4)$ puis

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CM'} = 2(2x + 2y) + (-2x + 2y - 4) = 2x + 6y - 4 = 2(x + 3y - 2).$$

Par suite,

$$\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{CM'} \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CM'} = 0 \Leftrightarrow 2(x + 3y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 2.$$

4) **a)** $(-4) + 3 \times 2 = -4 + 6 = 2$ et donc

$$\boxed{\text{le couple } (-4, 2) \text{ est une solution de l'équation } (E).}$$

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs. On a

$$x + 3y = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 3y \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y = k \text{ et } x = 2 - 3k.$$

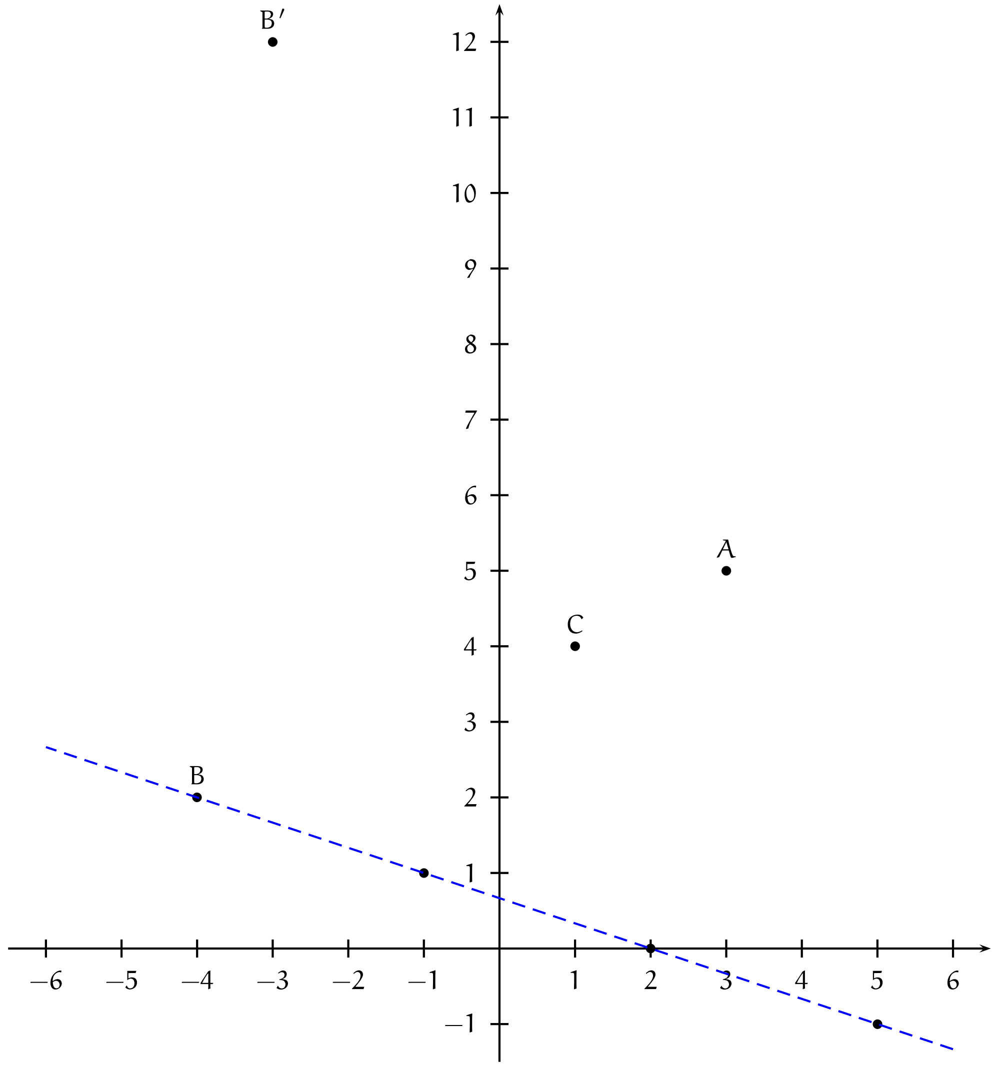
$$\boxed{\text{Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation } (E) \text{ sont les couples de la forme } (2 - 3k, k),\ k \in \mathbb{Z}.}$$

c) Soit k un entier relatif élément de $[-5, 5]$.

$$-5 \leq 2 - 3k \leq 5 \Leftrightarrow -7 \leq -3k \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 3k \leq 7 \Leftrightarrow -1 \leq k \leq \frac{7}{3} \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 2.$$

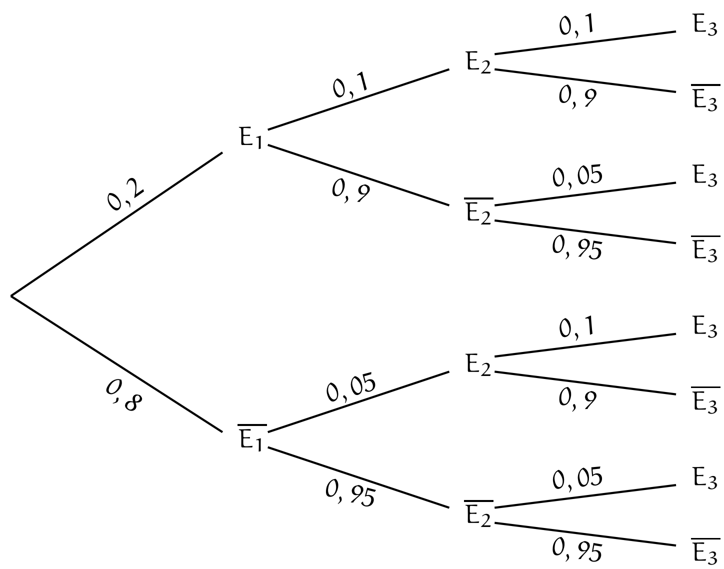
On trouve donc quatre points M :

- $k = -1$ fournit le point de coordonnées $(5, -1)$
- $k = 0$ fournit le point de coordonnées $(2, 0)$
- $k = 1$ fournit le point de coordonnées $(-1, 1)$
- $k = 2$ fournit le point de coordonnées $(-4, 2)$



EXERCICE 3

1) Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



a) X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

b) On a

$$p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) = p(E_1 \cap E_2) \times p_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3}) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) \times p_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3}) = 0,2 \times 0,1 \times 0,9 = 0,018.$$

De même

$$p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) = 0,2 \times 0,9 \times 0,05 = 0,009 \text{ et } p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) = 0,8 \times 0,05 \times 0,1 = 0,004.$$

Par suite,

$$p(X = 2) = p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) = 0,018 + 0,009 + 0,004 = 0,031.$$

On a aussi

$$p(X = 3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0,2 \times 0,1 \times 0,1 = 0,002.$$

$$\boxed{p(X = 2) = 0,031 \text{ et } p(X = 3) = 0,002.}$$

c)

$$p(X = 0) = p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 0,8 \times 0,95 \times 0,95 = 0,722$$

et

$$p(X = 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 2) - p(X = 3) = 1 - 0,722 - 0,031 - 0,002 = 0,245.$$

La loi de probabilité de X est donc

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002

d) $E(X) = \Sigma x_i p(X = x_i) = 0 \times 0,722 + 1 \times 0,245 + 2 \times 0,031 + 3 \times 0,002 = 0 + 0,245 + 0,062 + 0,006 = 0,313.$

$$\boxed{E(X) = 0,313.}$$

2) **a)** Soit n un entier naturel non nul.

$$p(E_n \cap E_{n+1}) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) = p_n \times 0,1 = 0,1p_n$$

et

$$p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = (1 - p_n) \times 0,05 = -0,05p_n + 0,05.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p(E_n \cap E_{n+1}) = 0,1p_n \text{ et } p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = -0,05p_n + 0,05.}$$

b) D'après la formule des probabilités totales on a alors

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = 0,1p_n - 0,05p_n + 0,05 = 0,05p_n + 0,05.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05.}$$

3) **a)** Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{19} \\
&= 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05(p_n + 1 - \frac{1}{19 \times 0,05}) = 0,05(p_n + \frac{0,95 - 1}{19 \times 0,05}) = 0,05(p_n - \frac{0,05}{19 \times 0,05}) \\
&= 0,05(p_n - \frac{1}{19}) = 0,05u_n.
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $0,05$. De plus,

$$u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{1}{5} - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de premier terme } u_1 = \frac{14}{95} \text{ et de raison } q = 0,05.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \dfrac{14}{95} \times 0,05^{n-1}$ puis $p_n = \dfrac{1}{19} + u_n = \dfrac{1}{19} + \dfrac{14}{95} \times 0,05^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_n = \frac{1}{19} + \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1}.}$$

c) Puisque $|0,05| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,05^{n-1} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{19}.}$$

EXERCICE 4

1) Restitution organisée de connaissances.

a) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x \in [0,+\infty[$, $g'(x) = e^x - x$. Pour tout réel x, on a $e^x > x$ et donc la fonction g' est positive sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g est croissante sur $[0,+\infty[$ et admet donc un minimum en 0 égal à $g(0)$ ou encore 1. Puisque 1 est positif, on en déduit finalement que la fonction g est positive sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,+\infty[,\ g(x) \geq 0.}$$

b) Soit $x > 0$. Puisque $g(x) \geq 0$, on a $e^x \geq \dfrac{x^2}{2}$ puis $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$. Maintenant, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.}$$

2) a) Soit $x \geq 0$. On a $\dfrac{1}{4}x \geq 0$ et $e^{-\frac{x}{2}} \geq 0$. Par suite, $\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} \geq 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est positive sur } [0,+\infty[.}$$

b) Pour $x \geq 0$, on a $f(x) = -\dfrac{1}{2}(-\dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}})$ et donc d'après un théorème de croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}(-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \lim_{X\to-\infty} -\frac{1}{2}Xe^X = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

c) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1 \times e^{-\frac{x}{2}} + x \times (-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}(2-x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

Pour tout réel positif x on a $\dfrac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}} > 0$. Par suite, pour $x \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.

Comme $f(2) = \dfrac{1}{4} \times 2e^{-1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{2e}$, on en déduit le tableau de variations de la fonction f

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

3) a) Le fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction F est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$ et de plus $F' = f$. D'après la question 2)a), la fonction f est positive sur $[0,+\infty[$ et même, plus précisément, f est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

b) Pour $x \geq 0$, posons $F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. F_1 est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geq 0$,

$$F_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - (\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} = f(x).$$

Par suite, la fonction F_1 est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Mais alors, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = [F_1(t)]_0^x = F_1(x) - F_1(0) = F_1(x) - (1 - e^0) = F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,+\infty[,\ F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}.}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.}$$

d) F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $[F(0), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$ c'est-à-dire l'intervalle $[0,1[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0,+\infty[$. En particulier, l'équation $F(x) = 0,5$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0,+\infty[$, solution que l'on note α.

La machine fournit $F(3,35) = 0,49\ldots$ et $F(3,36) = 0,50\ldots$. Comme $F(\alpha) = 0,5$, on a donc $F(3,35) < F\alpha) < F(3,36)$. Comme F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $3,35 < \alpha < 3,36$. Finalement

$$\boxed{\alpha = 3,36 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès.}}$$

4) Soit n un entier naturel non nul. Puisque la fonction f est positive sur $[0,n]$, on a

$$A_n = \int_0^n f(t)\ dt = F(n).$$

Puisque la fonction F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$,

- si $n \leq 3$, $F(n) \leq F(3) < F(3,35) < F(\alpha) = 0,5$
- si $n \geq 4$, $F(n) \geq F(4) \geq F(3,36) \geq F(\alpha) = 0,5$.

Donc

$$\boxed{\text{le plus petit entier } n \text{ tel que } A_n \geq 0,5 \text{ est } 4.}$$