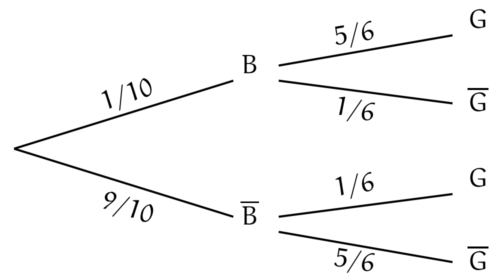
BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2007
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Polynésie

EXERCICE 1

Partie A

1. Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales

$$p(G) = p(G \cap B) + p(G \cap \overline{B}) = p(B) \times p_B(G) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

$$\boxed{p(G) = \frac{7}{30}.}$$

2. La probabilité demandée est $p_{\overline{G}}(B)$. Or

$$p_{\overline{G}}(B) = \frac{p(B \cap \overline{G})}{p(\overline{G})} = \frac{p(B) \times p_B(\overline{G})}{1 - p(G)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} \times \frac{30}{23} = \frac{1}{46}.$$

$$\boxed{p_{\overline{G}}(B) = \frac{1}{46}.}$$

3. Notons X le nombre de gains. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le joueur gagne » avec une probabilité $p = \frac{7}{30}$ (d'après 1.) ou « le joueur perd » avec une probabilité $1 - p = \frac{23}{30}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{7}{30}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{7}{30}\right)^2 \left(\frac{23}{30}\right)^2 = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{7^2 \times 23^2}{30^4} = \frac{6 \times 7^2 \times 23^2}{30^4} = \frac{25921}{135000} = 0,192 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

La probabilité que le joueur gagne exactement deux parties est égale à $0,192$ à 10^{-3} près.

4. Soit n le nombre de parties jouées. L'événement « le joueur gagne au moins une partie en n tentatives » est le contraire de l'événement « le joueur ne gagne aucune partie en n tentatives ». A chaque partie, la probabilité que le joueur perde est $\dfrac{23}{30}$. La probabilité que le joueur perde toutes les parties est donc $\left(\dfrac{23}{30}\right)^n$ et finalement la probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $1-\left(\dfrac{23}{30}\right)^n$. Maintenant

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,99 &\Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n \leq \frac{1}{100}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{30}{23}\right)^n \geq 100 \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{30}{23}\right)^n\right) \geq \ln 100 \text{ (par croissance de la fonction } x \mapsto \ln x \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{30}{23}\right) \geq \ln(100) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{30}{23}\right)} \text{ (car } \ln\left(\frac{30}{23}\right) > 0)\\
&\Leftrightarrow n \geq 17,3\ldots\\
&\Leftrightarrow n \geq 18.
\end{aligned}$$

Le nombre minimal de parties à jouer pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$ est 18.

Partie B

1. a) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	4	-1
$p(X = x_i)$	$\dfrac{7}{30}$	$\dfrac{23}{30}$

L'espérance de X est :

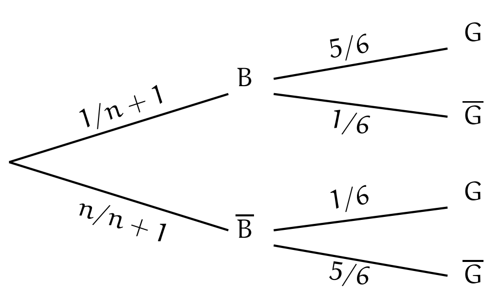
$$E(X) = 4 \times \frac{7}{30} + (-1) \times \frac{23}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{6}.}$$

b) Puisque $E(X) > 0$,

le jeu est défavorable à l'organisateur.

2. Représentons de nouveau la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales

$$p(G) = p(G \cap B) + p(G \cap \overline{B}) = p(B) \times p_B(G) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(G) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{n+5}{6(n+1)}.$$

Puisque $1 - \frac{n+5}{6(n+1)} = \frac{(6n+6)-(n+5)}{6(n+1)} = \frac{5n+1}{6(n+1)}$, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est alors :

x_i	4	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{n+5}{6(n+1)}$	$\frac{5n+1}{6(n+1)}$

L'espérance de X est :

$$E(X) = 4 \times \frac{n+5}{6(n+1)} + (-1) \times \frac{5n+1}{6(n+1)} = \frac{4(n+5)-(5n+1)}{6(n+1)} = \frac{-n+19}{6(n+1)}.$$

Par suite,

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-n+19}{6(n+1)} > 0 \Leftrightarrow -n+19 > 0 \Leftrightarrow n < 19 \Leftrightarrow n \leq 18.$$

Jusqu'à 18 jetons noirs, le jeu est défavorable à l'organisateur.

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1. Soit z un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont notées respectivement x et y.

$$\begin{aligned}
\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 &\Leftrightarrow (x - iy) - 3i(x + iy) - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow x - iy - 3ix + 3y - 3 + 6i = 0\\
&\Leftrightarrow (x + 3y - 3) + i(-3x - y + 6) = 0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 3y - 3 = 0\\ -3x - y + 6 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -3x + 6\\ x + 3(-3x + 6) - 3 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -3x + 6\\ -8x + 15 = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{15}{8}\\ y = -3 \times \dfrac{15}{8} + 6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{15}{8}\\ y = \dfrac{3}{8}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation proposée est } \left\{\frac{15 + 3i}{8}\right\}.}$$

2. Notons r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. L'expression complexe de r est $z' = e^{i\pi/3}z$ ou encore $z' = \dfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$. On a alors

$$\begin{aligned}
\text{OAB équilatéral direct} &\Leftrightarrow OB = OA \text{ et } \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow B = r(A)\\
&\Leftrightarrow z_B = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z_A \Leftrightarrow z_B = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(4 - 2i) \Leftrightarrow z_B = (1 + i\sqrt{3})(2 - i)\\
&\Leftrightarrow z_B = (2 + \sqrt{3}) + i(2\sqrt{3} - 1).
\end{aligned}$$

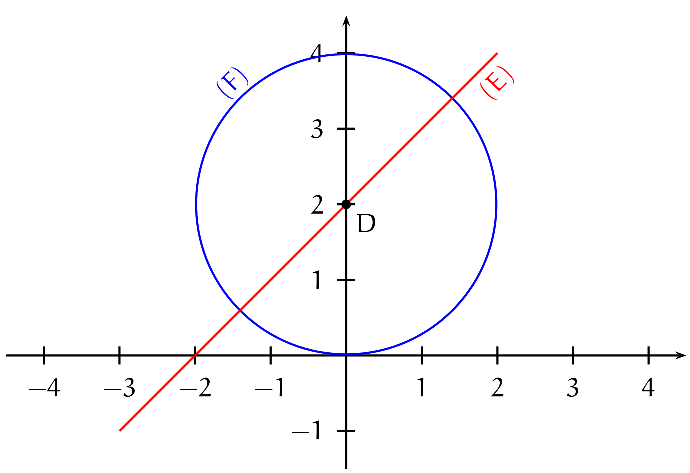
$$\boxed{z_B = (2 + \sqrt{3}) + i(2\sqrt{3} - 1).}$$

3. a) et **b)** Soit M un point du plan distinct de D dont l'affixe est notée z.

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

L'ensemble (E) est la droite passant par $D(0, 2)$ d'angle polaire $\dfrac{\pi}{4}$ privée de D ou encore la droite passant par D et de coefficient directeur 1, privée de D. (E) est donc la droite d'équation cartésienne $y = x + 2$ privée du point de coordonnées $(0, 2)$.

On sait d'autre part que (F) est le cercle de centre D et de rayon 2.



 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

4. Soit M un point du plan dont l'affixe z est un nombre complexe distinct de -2. Soient G et H les points d'affixes respectives 1 et -2. On note tout d'abord que $z \neq -2 \Leftrightarrow \overline{z} \neq \overline{-2} \Leftrightarrow \overline{z} \neq -2 \Leftrightarrow \overline{z}+2 \neq 0 \Leftrightarrow |\overline{z}+2| \neq 0$. Par suite

$$\begin{aligned}
|z'| = 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{\overline{z}+2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|\overline{z}+2|} = 1 \\
&\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{z}+2| \text{ et } |\overline{z}+2| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{z}+2| \text{ (car } -2 \text{ n'est pas solution de l'équation } |z-1| = |\overline{z}+2|) \\
&\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{\overline{z}+2}| \Leftrightarrow |z-1| = |z+2| \Leftrightarrow |z-z_G| = |z-z_H| \\
&\Leftrightarrow GM = HM \Leftrightarrow M \in \text{med}[GH].
\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[GH]$ c'est-à-dire la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

Partie A

1. On sait qu'une équation cartésienne du cône d'axe (Oz), de sommet S de coordonnées $(0, 0, h)$, $h \in \mathbb{R}$ et d'angle au sommet α, $\alpha \in]0, \pi[$ est

$$x^2 + y^2 = (z - h)^2 \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ici, $S = O$ et donc $h = 0$. Il nous reste à calculer $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Le projeté orthogonal du point $A(1, 3, 2)$ sur l'axe (Oz) est le point H de coordonnées $(0, 0, 2)$. Dans le triangle OAH, rectangle en H, on a alors

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{HA}{OH} = \frac{\sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (2-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\frac{5}{2}},$$

et donc $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{5}{2}$. On a montré que

$$\boxed{\text{Une équation du cône } (\Gamma) \text{ est } x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2.}$$

2. a) (P) est le plan d'équation $z = z_B$ ou encore $z = -4$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (P) \text{ est } z = -4.}$$

b) Puisque (P) est un plan parallèle à (xOy), on sait que l'intersection de (P) et de (Γ) est un cercle.

$$\boxed{(C_1) \text{ est un cercle.}}$$

3. Le plan Q d'équation $y = 3$ est un plan parallèle à l'axe (Oz) ne contenant pas (Oz). On sait alors que l'intersection du plan Q avec le cône (Γ) est une hyperbole.

$$\boxed{(C_2) \text{ est une hyperbole.}}$$

Partie B

1. a) Soient x et y deux entiers relatifs. $x^2 + y^2 = 40$ si et seulement si x^2 est un carré parfait inférieur à 40, $40 - x^2$ est un carré parfait et $y^2 = 40 - x^2$. Les carrés parfaits inférieurs à 40 sont 0, 1, 4, 9, 16, 25 et 36. Maintenant, $40 - 0 = 40$, $40 - 1 = 39$, $40 - 9 = 31$, $40 - 16 = 24$ et $40 - 25 = 15$ ne sont pas des carrés parfaits et $40 - 4 = 36$ et $40 - 36 = 4$ sont des carrés parfaits. En résumé

$$x^2 + y^2 = 40 \Leftrightarrow ((x^2 = 4 \text{ et } y^2 = 36) \text{ ou } (x^2 = 36 \text{ et } y^2 = 4)).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation } (E) \text{ sont} \\ (2,6),\ (-2,6),\ (2,-6),\ (-2,-6),\ (6,2),\ (-6,2),\ (6,-2) \text{ et } (-6,-2).\end{array}}$$

b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (C_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2 \\ z = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \times (-4)^2 \\ z = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 40 \\ z = -4 \end{array}\right. .$$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

Mais alors, d'après la question précédente,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les points de } (C_1) \text{ dont les coordonnées sont des entiers relatifs sont les points de coordonnées} \\ (2,6,-4),\ (-2,6,-4),\ (2,-6,-4),\ (-2,-6,-4),\ (6,2,-4),\ (-6,2,-4),\ (6,-2,-4) \text{ et } (-6,-2,-4).\end{array}}$$

2. **a)** Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de (Γ) de coordonnées (x,y,z). On a donc $x^2+y^2+\dfrac{5}{2}z^2$ ou encore $2(x^2+y^2)=5z^2$. L'entier 2 divise l'entier $2(x^2+y^2)$ et donc l'entier 2 divise l'entier $5z^2$. Comme d'autre part les entiers 2 et 5 sont premiers entre eux, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que l'entier 2 divise l'entier z^2. Ainsi, z^2 est un nombre pair et donc nécessairement z est un nombre pair (si z est impair, $z\equiv 1\ (2)$ puis $z^2\equiv 1\ (2)$ et donc z^2 est impair).

$$z \text{ est divisible par } 2.$$

On peut alors poser $z=2z'$ où z' est un entier relatif. L'égalité $2(x^2+y^2)=5z^2$ s'écrit alors $2(x^2+y^2)=20z'^2$ ou encore $x^2+y^2=10z'^2$ ce qui montre que l'entier 10 divise l'entier x^2+y^2.

$$x^2+y^2 \text{ est divisible par } 10.$$

b) Si de plus M est un point de (C_2), alors $y=3$. Par suite

$$x^2+y^2 \text{ divisible par } 10 \Rightarrow x^2+y^2\equiv 0\ (10) \Rightarrow x^2+3^2\equiv 0\ (10) \Rightarrow x^2\equiv -9\ (10) \Rightarrow x^2\equiv 1\ (10).$$

c) Modulo 10, un entier relatif quelconque est congru à un et un seul des entiers -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. Or
- $0^2=0$ et donc $0^2\not\equiv 1\ (10)$.
- $(-1)^2=1^2=1$ et donc $1^2\equiv 1\ (10)$ et $(-1)^2\equiv 1\ (10)$.
- $(-2)^2=2^2=4$ et donc $2^2\not\equiv 1\ (10)$ et $(-2)^2\not\equiv 1\ (10)$.
- $(-3)^2=3^2=9$ et donc $3^2\not\equiv 1\ (10)$ et $(-3)^2\not\equiv 1\ (10)$.
- $(-4)^2=4^2=16$ et donc $4^2\not\equiv 1\ (10)$ et $(-4)^2\not\equiv 1\ (10)$.
- $5^2=25$ et donc $5^2\not\equiv 1\ (10)$.

En résumé, $x^2\equiv 1\ (10) \Leftrightarrow ((x\equiv 1\ (10) \text{ ou } x\equiv -1\ (10))$.

$$\boxed{\text{Les entiers relatifs } x \text{ tel que } x^2\equiv 1\ (10) \text{ sont les entiers de la forme } 1+10k,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou de la forme } -1+10k,\ k\in\mathbb{Z}.}$$

d) Le point de coordonnées $(-1,3,2)$ est un point de (C_2) distinct de A dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

EXERCICE 4

Partie A

1. **a)** Soit $x \in [1, 2]$. Puisque $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ puis $x \ln x \geq 0$ et finalement $f(x) \geq 0$.

$$\boxed{f \text{ est positive sur l'intervalle } [1, 2].}$$

b) $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{(1 + 2\ln 2) - (1 + 2\ln 1)}{2 - 1} = 2\ln 2.$

$$\boxed{\text{Le coefficient directeur de la droite } (MN) \text{ est } 2\ln 2.}$$

c) La fonction $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $[1, 2]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[1, 2]$ et il en est de même de f.
Soit $x \in [1, 2]$. On note (T_x) la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x. On sait que le coefficient directeur de (T_x) est $f'(x)$ avec

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Par suite,

$$(T_x) \parallel (MN) \Leftrightarrow \ln x + 1 = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln 2 - 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln(2^2) - \ln(e) \Leftrightarrow \ln x = \ln\left(\frac{4}{e}\right) \Leftrightarrow x = \frac{4}{e}.$$

Comme de plus $\dfrac{4}{e} = 1,4\ldots \in [1, 2]$, sur l'intervalle $[1, 2]$, il existe un et un seul point en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite (MN) à savoir le point E de C_f d'abscisse $\dfrac{4}{e}$.

d) On a $x_E = \dfrac{4}{e}$ puis $f(x_E) = 1 + \dfrac{4}{e}\ln\left(\dfrac{4}{e}\right) = 1 + \dfrac{4}{e}(2\ln 2 - 1)$ et enfin par définition $f'(x_E) = 2\ln 2$. Une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point E est donc

$$y = f'(x_E)(x - x_E) + f(x_E) = 2\ln 2(x - \frac{4}{e}) + 1 + \frac{4}{e}(2\ln 2 - 1) = (2\ln 2)x - 2\ln 2 \times \frac{4}{e} + 1 + 2\ln 2 \times \frac{4}{e} - \frac{4}{e} = (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{e}.$$

$$\boxed{\text{Une équation de la tangente } T \text{ à la courbe } C_f \text{ au point d'abscisse } E \text{ est } y = (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{e}.}$$

2. **a)** g est dérivable sur l'intervalle $[1, 2]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1, 2]$ et pour $x \in [1, 2]$

$$g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = 1 + \ln x - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1, 2],\ g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right).}$$

b) Soit $x \in [1, 2]$.

$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) \geq -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{4} \geq e^{-1} \text{ (par croissance de la fonction } x \mapsto e^x \text{ sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x \geq 4e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

La fonction g' est donc positive sur l'intervalle $[\frac{4}{e}, 2]$ et négative sur l'intervalle $[1, \frac{4}{e}]$. On en déduit que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1, \frac{4}{e}]$ et croisante sur l'intervalle $[\frac{4}{e}, 2]$. La fonction g admet donc un minimum en $\frac{4}{e}$ égal à $f(x_E) - (f'(x_E)(x_E - x_E) + f(x_E))$ ou encore un minimum égal à 0.

Ainsi, pour tout réel x de $[1, 2]$, $f(x) \geq (2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$ et donc

$$\boxed{C_f \text{ est au-dessus de } T \text{ sur l'intervalle } [1, 2].}$$

3. **a)** On rappelle que l'aire d'un trapèze rectangle est : $\dfrac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$. Ici, l'aire du trapèze $MNQP$ est égale à

$$\frac{(PM + QN) \times PQ}{2} = \frac{(1 + 1 + 2\ln 2) \times 1}{2} = 1 + \ln 2,$$

et l'aire du trapèze $M'N'QP$ est égale à

$$\frac{(PM' + QN') \times PQ}{2} = \frac{(2\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 + 4\ln 2 - \frac{4}{e} + 1) \times 1}{2} = 3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'aire du trapèze } MNQP \text{ est égale à } 1 + \ln 2 \text{ unités d'aire.}\\ \text{L'aire du trapèze } M'N'QP \text{ est égale à } 3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 \text{ unités d'aire.}\end{array}}$$

b) Sur l'intervalle $[1, 2]$, C_f est au-dessous de la droite (MN) et au-dessus de la droite T.
Donc aire$(M'N'QP) \leq \mathcal{A} \leq$ aire$(MNQP)$ ou encore

$$3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 \leq \mathcal{A} \leq 1 + \ln 2.$$

La machine fournit $1 + \ln 2 = 1,69\ldots$ et $3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 = 1,60\ldots$. On en déduit que

$$\boxed{1,6 < \mathcal{A} < 1,7.}$$

Partie B

1. Pour $x \in [1, 2]$, posons $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v(x) = \ln x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, 2]$ et pour tout réel x de $[1, 2]$, $u'(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1, 2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{4\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{2} - \frac{1}{2}\int_1^2 x \, dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

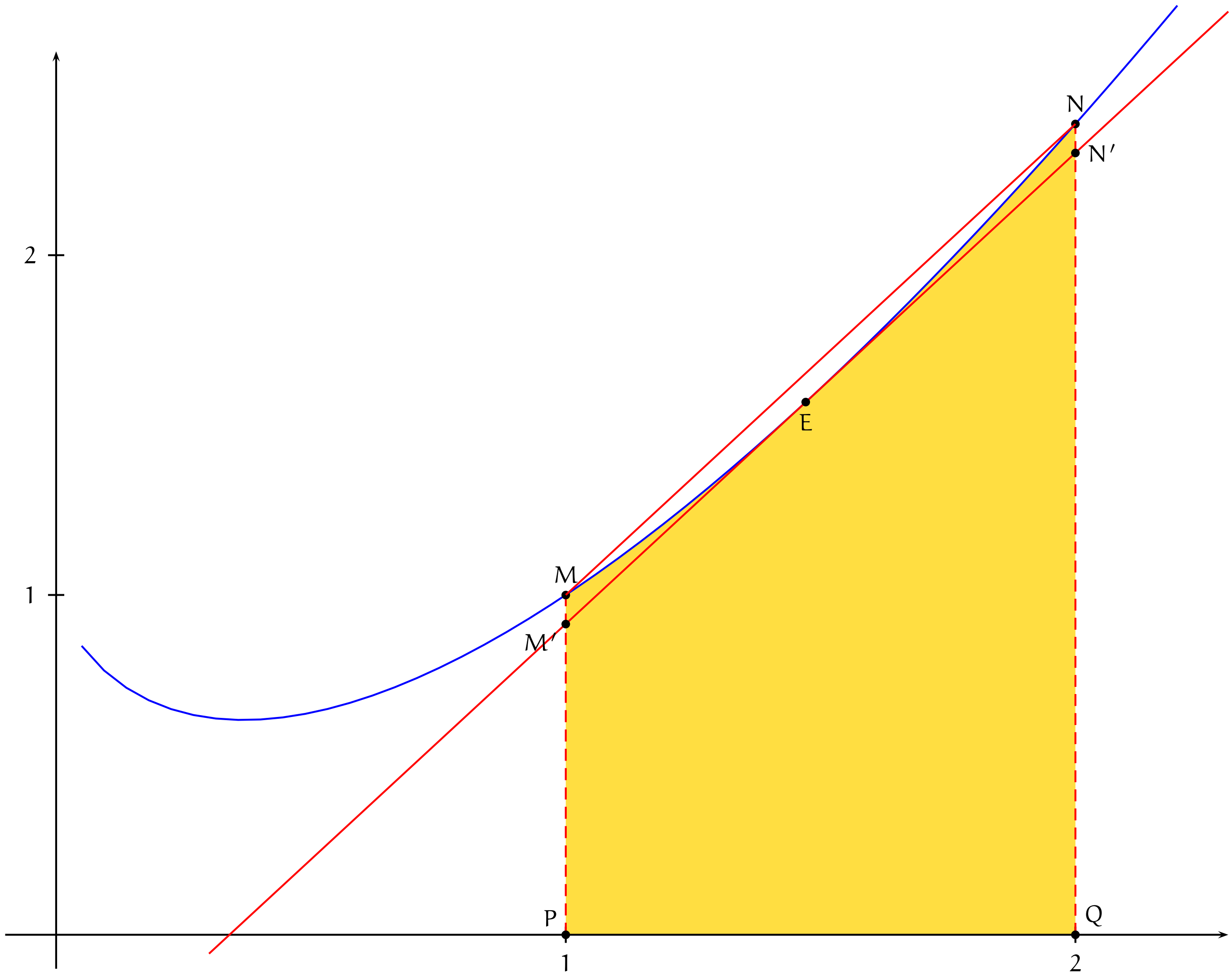
$$\boxed{\int_1^2 x\ln x \, dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.}$$

2. Puisque la fonction f est continue et positive sur $[1, 2]$,

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (1 + x\ln x) \, dx = \int_1^2 dx + \int_1^2 x\ln x \, dx = 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 2\ln 2 + \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\ln 2 + \frac{1}{4} = 1,63\ldots \text{ unités d'aire.}}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.



 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.