BACCALAUREAT GENERAL

Session 2007

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

EXERCICE 1

1) Un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 2, -1)$ et un vecteur normal au plan (P') est le vecteur $\overrightarrow{n'}(-1, 1, 1)$. De plus,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{les plans } (P) \text{ et } (P') \text{ sont perpendiculaires.}}$$

2) Puisque les plans (P) et (P') sont perpendiculaires, les plans (P) et (P') sont en particulier sécants en une droite. Vérifions alors que tout point de la droite (d) appartient à (P) et à (P').

Soit $M(-\frac{1}{3} + t, -\frac{1}{3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (d). Puisque

$$\left(-\frac{1}{3} + t\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = 0,$$

le point M appartient au plan (P) et puisque

$$-\left(-\frac{1}{3} + t\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

le point M appartient au plan (P'). Ainsi tout point de la droite (d) est un point de la droite $(P) \cap (P')$ et finalement

$$\boxed{(P) \cap (P') \text{ est la droite } (d) \text{ de représentation paramétrique } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}.}$$

3) Calculons la distance du point A au plan (P).

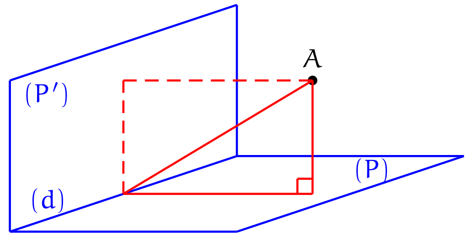
$$d(A, (P)) = \frac{|0 + 2 \times 1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

De même

$$d(A, (P')) = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{d(A, (P)) = \frac{2}{\sqrt{6}} \text{ et } d(A, (P')) = \frac{2}{\sqrt{3}}.}$$

4) Puisque les plans (P) et (P') sont perpendiculaires, la distance du point A à la droite (d) est fournie par le théorème de Pythagore :



$$(d(A,(d))^2 = (d(A,(P))^2 + (d(A,(P'))^2 = \frac{4}{6} + \frac{4}{3} = 2,$$

et donc

$$\boxed{\text{la distance du point } A \text{ à la droite } (d) \text{ vaut } \sqrt{2}.}$$

EXERCICE 2

1) Restitution organisée de connaissances

Soient u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a;b]$ dont les dérivées sont continues sur l'intervalle $[a;b]$. On sait que la fonction uv est dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ et que $(uv)' = u'v + uv'$. Maintenant, les fonctions uv' et $u'v$ sont continues sur l'intervalle $[a;b]$ en tant que produit de fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ et il en est de même de la fonction $(uv)'$. On peut donc intégrer sur l'intervalle $[a;b]$ et on obtient par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (uv)'(x)\ dx = \int_a^b u'(x)v(x)\ dx + \int_a^b u(x)v'(x)\ dx,$$

et donc

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = \int_a^b (uv)'(x)\ dx - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

On a démontré la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.}$$

2) a. Effectuons une intégration par parties dans l'intégrale I en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = e^x & v(x) = \sin(x) \\ u'(x) = e^x & v'(x) = \cos x. \end{array}$$

Donc, pour $x \in [0;\pi]$, posons $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0;\pi]$ et pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0;\pi]$. On peut effectuer une intégration par parties et on obtient

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x\ dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\ dx = e^\pi \sin\pi - e^0 \sin 0 - \int_0^\pi e^x \cos x\ dx = 0 - J = -J.$$

Mais on peut aussi poser

$$\begin{array}{ll} u(x) = -\cos x & v(x) = e^x \\ u'(x) = \sin x & v'(x) = e^x. \end{array}$$

et dans ce cas, la formule d'intégration par parties appliquée à l'intégrale I s'écrit :

$$I = [e^x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(-\cos x)\ dx = -e^\pi \cos\pi + e^0 \cos 0 + \int_0^\pi e^x \cos x\ dx = J + e^\pi + 1.$$

$$\boxed{I = -J \text{ et } I = J + e^\pi + 1.}$$

b. On a donc $I = -I + e^\pi + 1$ puis $2I = e^\pi + 1$ puis $I = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$ et enfin $J = -I = -\dfrac{e^\pi + 1}{2}$.

$$\boxed{I = \frac{e^\pi + 1}{2} \text{ et } J = -\frac{e^\pi + 1}{2}.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) $i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$ et donc

$$\boxed{i \text{ est solution de l'équation } (E).}$$

2) Soient a, b et c trois nombres complexes. Pour tout nombre complexe z, on a

$$(z-i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic = az^3 + (b-ia)z^2 + (c-ib)z - ic.$$

Mais alors, si $a = 1$, $b - ia = -(4+i)$, $c - ib = 13 + 4i$ et $-ic = -13i$, l'égalité de l'énoncé est bien valable pour tout nombre complexe z. Or

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -(4+i) \\ c - ib = 13 + 4i \\ -ic = -13i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -(4+i) + i \\ c = 13 + 4i + ib \\ c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 + 4i - 4i \\ c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(z^2 - 4z + 13).}$$

3) Pour tout nombre complexe z,

$$(z-i)(z^2 - 4z + 13) = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 - 4z + 13 = 0.$$

Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$. L'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2 - 3i.$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } (E) \text{ sont } i,\ 2+3i \text{ et } 2-3i.}$$

Partie B

1) On sait que l'expression complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Ici on a

$$\begin{aligned} z_{A'} &= e^{i\pi/4}(z_A - z_B) + z_B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(i - (2+3i)) + 2 + 3i \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \times (-2-2i) + 2 + 3i = -\sqrt{2}(1+i)^2 + 2 + 3i = -\sqrt{2}(1 + 2i - 1) + 2 + 3i \\ &= 2 + (3 - 2\sqrt{2})i. \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{A'} = 2 + (3 - 2\sqrt{2})i.}$$

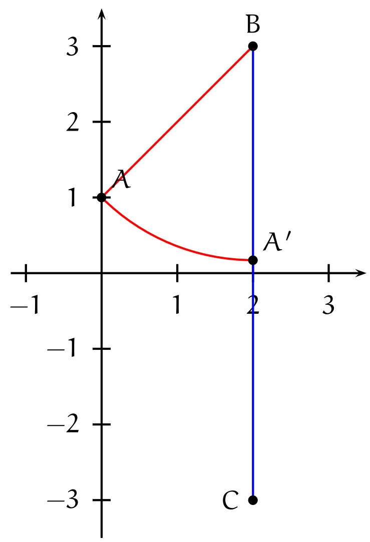
2) Les points A', B et C sont sur la droite d'équation $x = 2$ et donc

$$\boxed{\text{les points } A', B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$$

Ces points étant deux à deux distincts, on en déduit qu'il existe une homothétie de centre B et une seule transformant C en A'. Notons k son rapport. On a $z_C - z_B = (2-3i) - (2+3i) = -6i$ et $z_{A'} - z_B = 2 + (3-2\sqrt{2})i - (2+3i) = -2\sqrt{2}i$. On en déduit que

$$k = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-2\sqrt{2}i}{-6i} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\boxed{\text{Le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme C en } A' \text{ est } \frac{\sqrt{2}}{3}.}$$



EXERCICE 4

1)	**d.**
2)	**b.**
3)	**b.**
4)	**a.**

Explications.

1) Notons X le nombre de personnes qui achètent le produit. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne achète le produit » avec une probabilité $p = 0,2$ ou « la personne n'accepte pas de répondre » avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,2$. La probabilité demandée est $p(X = 2)$. Or

$$p(X=2) = \binom{5}{2}(0,2)^2(0,8)^3 = \frac{5\times 4}{2}\times 0,04\times 0,512 = 0,2048.$$

$$\boxed{p(X=2) = 0,2048.}$$

2) Notons

- G l'événement « l'élève interrogé est un garçon » de sorte que $\overline{G}$ est l'événement « l'élève interrogé est une fille »
- P l'événement « l'élève interrogé a eu son permis du premier coup ».

L'énoncé donne $p(G) = \frac{1}{4}$ et donc $p(\overline{G}) = \frac{3}{4}$, $p_{\overline{G}}(P) = \frac{1}{3}$ et $p_G(P) = \frac{1}{10}$. La probabilité demandée est $p(P)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(P) = p(P\cap G) + p(P\cap\overline{G}) = P(G)\times p_G(P) + P(\overline{G})\times p_{\overline{G}}(P) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{10} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{11}{40} = 0,275.$$

$$\boxed{p(P) = 0,275.}$$

3) La probabilité demandée est $p_P(G)$. Or

$$p_P(G) = \frac{p(P\cap G)}{p(P)} = \frac{p(G)\times p_G(P)}{p(P)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{11}{40}} = \frac{1}{11} = 0,091 \text{ arrondi au millième.}$$

$$\boxed{p_P(G) = 0,091 \text{ arrondi au millième.}}$$

4) L'aire $\mathscr{A}$ de la cible est égale à $\pi\times(30)^2$ cm^2 ou encore 900π cm^2. L'aire $\mathscr{A}_1$ de la zone la plus éloignée du centre est égale à $(\pi\times(30)^2 - \pi\times(20)^2)$ cm^2 ou encore 500π cm^2. Puisque le tireur touche toujours la cible et que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone, la probabilité demandée est le rapport $\frac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}}$ ou encore $\frac{5}{9}$.

$$\boxed{\text{La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre vaut } \frac{5}{9}.}$$

EXERCICE 5

Partie A : Ètude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1) Pour $x > -1$, on a $x + 1 > 0$ et donc la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$. Par suite la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$ et finalement f est dérivable sur $]-1, +\infty[$. De plus, pour $x > -1$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > -1,\ f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}.}$$

2) La fonction N est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour $x > -1$, $N'(x) = 2(1+x) + \dfrac{1}{1+x} > 0$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } N \text{ est strictement croissante sur }]-1, +\infty[.}$$

$N(0) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$. Mais alors puisque la fonction N est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, pour $-1 < x < 0$, $N(x) < N(0) = 0$ et pour $x > 0$, $N(x) > 0$. Enfin, puisque $(1+x)^2 > 0$, pour tout réel $x > -1$, $f'(x)$ est du signe de $N(x)$. On en déduit le

Tableau de variations de f.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(0) = 0 - \dfrac{\ln 1}{1} = 0$

3) Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Soit alors $x > -1$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x \Leftrightarrow \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ et la droite } \mathscr{D} \text{ se coupent en } O(0, 0).}$$

Partie B : Ètude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1) D'après la question 2) de la partie A, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$. Soit alors x un réel.

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4 - \frac{\ln(5)}{5} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4.$$

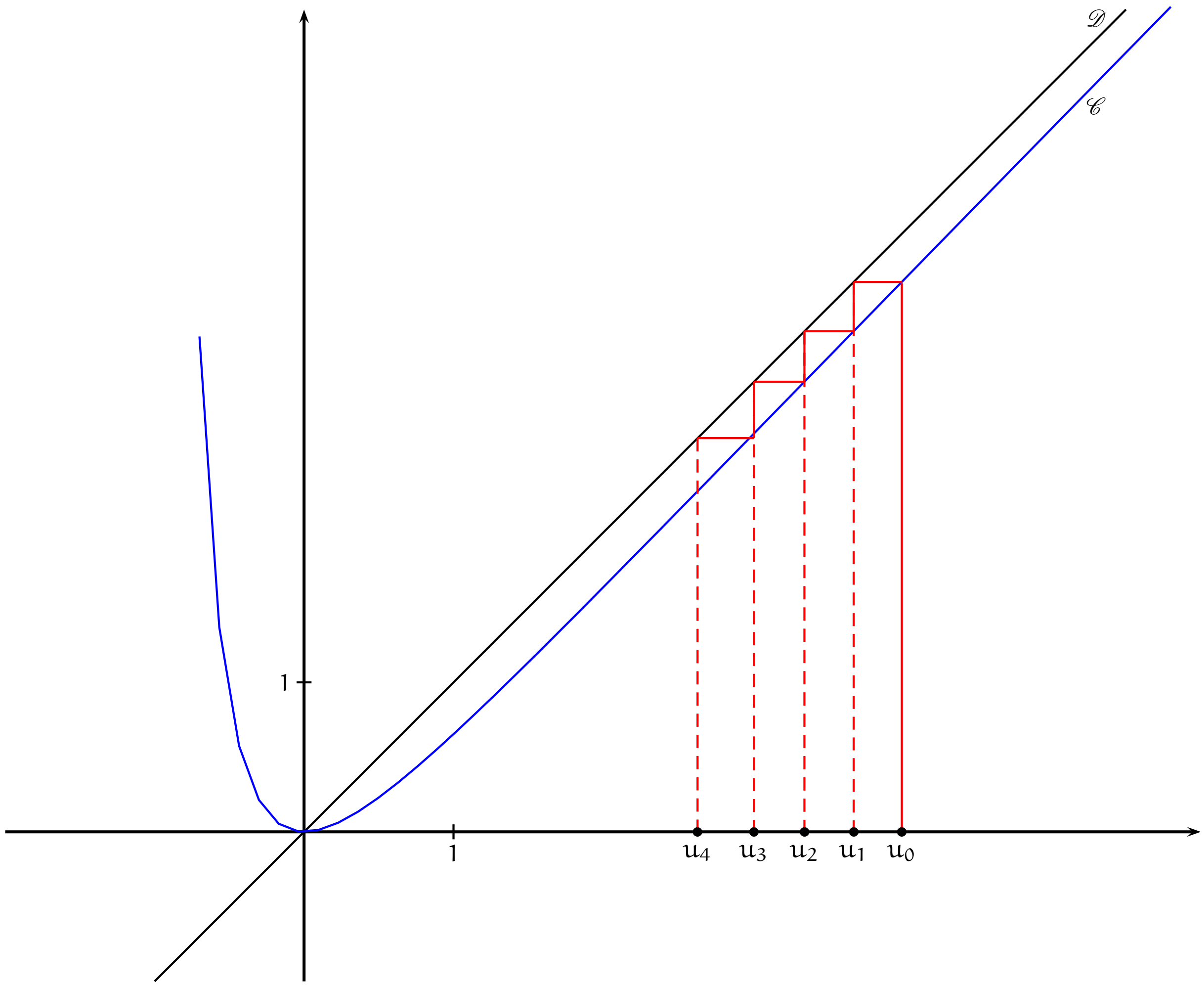
$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \in [0; 4],\ f(x) \in [0; 4].}$$

2) **a.** Voir graphique page suivante.

b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0; 4]$.
- Puisque $u_0 = 4 \in [0; 4]$, la propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [0; 4]$. Alors d'après la question 1) de la partie B, $u_{n+1} = f(u_n) \in [0; 4]$.

On a ainsi montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \in [0;4].}$$



c. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leq 0 \text{ car } 1+u_n \geq 1.$$

Donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

d. Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

e. Notons ℓ la limite de la suite (u_n). Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 4$ et donc par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a $0 \leq \ell \leq 4$. Puisque la fonction f est continue sur $[0;4]$ et donc en ℓ, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $f(\ell) = \ell$. La question 3) de la partie A permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\ell = 0.}$$

