EXERCICE 4

1) Restitution organisée de connaissances.

a) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x \in [0,+\infty[$, $g'(x) = e^x - x$. Pour tout réel x, on a $e^x > x$ et donc la fonction g' est positive sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g est croissante sur $[0,+\infty[$ et admet donc un minimum en 0 égal à $g(0)$ ou encore 1. Puisque 1 est positif, on en déduit finalement que la fonction g est positive sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,+\infty[,\ g(x) \geq 0.}$$

b) Soit $x > 0$. Puisque $g(x) \geq 0$, on a $e^x \geq \dfrac{x^2}{2}$ puis $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$. Maintenant, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.}$$

2)

a) Soit $x \geq 0$. On a $\dfrac{1}{4}x \geq 0$ et $e^{-\frac{x}{2}} \geq 0$. Par suite, $\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} \geq 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est positive sur } [0,+\infty[.}$$

b) Pour $x \geq 0$, on a $f(x) = -\dfrac{1}{2}(-\dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}})$ et donc d'après un théorème de croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}(-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \lim_{X\to-\infty} -\frac{1}{2}Xe^X = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

c) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1 \times e^{-\frac{x}{2}} + x \times (-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}(2-x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

Pour tout réel positif x on a $\dfrac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}} > 0$. Par suite, pour $x \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.

Comme $f(2) = \dfrac{1}{4} \times 2e^{-1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{2e}$, on en déduit le tableau de variations de la fonction f

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

3)

a) Le fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction F est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$ et de plus $F' = f$. D'après la question 2)a), la fonction f est positive sur $[0,+\infty[$ et même, plus précisément, f est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

b) Pour $x \geq 0$, posons $F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. F_1 est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geq 0$,

$$F_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - (\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} = f(x).$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

Par suite, la fonction F_1 est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Mais alors, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = [F_1(t)]_0^x = F_1(x) - F_1(0) = F_1(x) - (1 - e^0) = F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0, +\infty[,\ F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}.}$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.}$$

d) F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $[F(0), \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)[$ c'est-à-dire l'intervalle $[0, 1[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, +\infty[$. En particulier, l'équation $F(x) = 0,5$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, +\infty[$, solution que l'on note α.

La machine fournit $F(3,35) = 0,49\ldots$ et $F(3,36) = 0,50\ldots$. Comme $F(\alpha) = 0,5$, on a donc $F(3,35) < F\alpha) < F(3,36)$. Comme F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $3,35 < \alpha < 3,36$. Finalement

$$\boxed{\alpha = 3,36 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès.}}$$

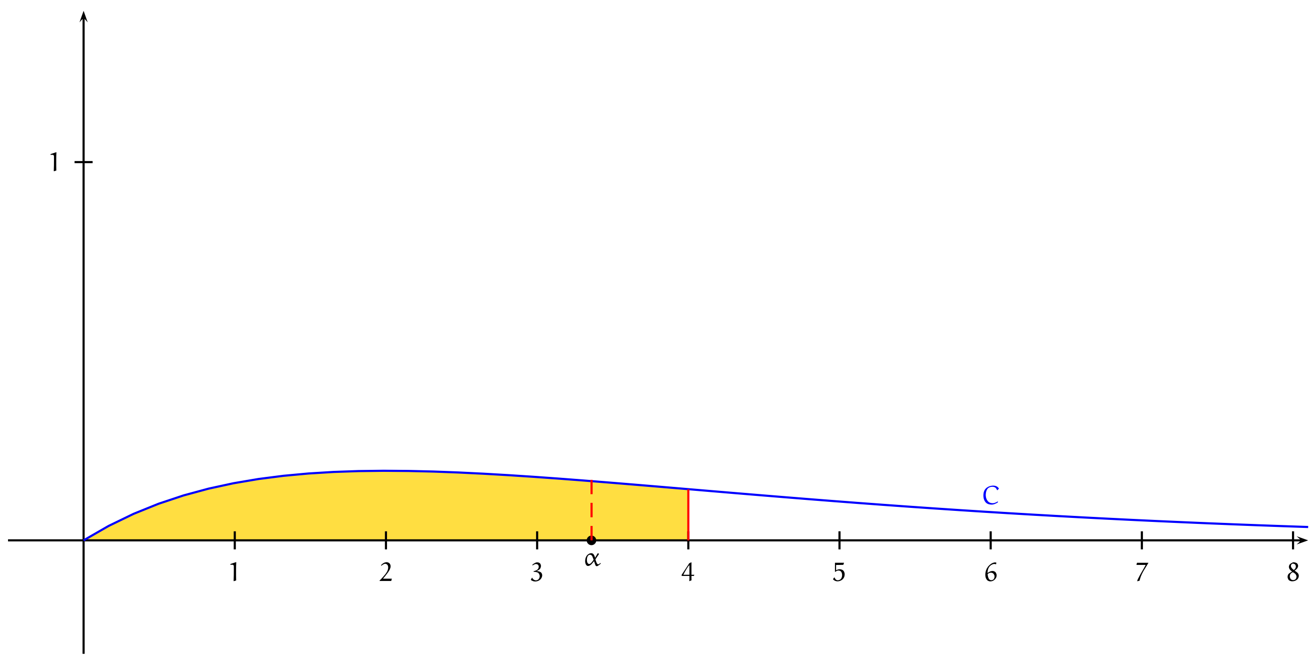
4) Soit n un entier naturel non nul. Puisque la fonction f est positive sur $[0, n]$, on a

$$A_n = \int_0^n f(t)\ dt = F(n).$$

Puisque la fonction F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$,
- si $n \leq 3$, $F(n) \leq F(3) < F(3,35) < F(\alpha) = 0,5$
- si $n \geq 4$, $F(n) \geq F(4) \geq F(3,36) \geq F(\alpha) = 0,5$.

Donc

$$\boxed{\text{le plus petit entier } n \text{ tel que } A_n \geq 0,5 \text{ est } 4.}$$



 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.