

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.*

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.**

EXERCICE 1 (5 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ».

L'événement contraire d'un événement E sera noté \bar{E} .

La probabilité d'un événement E sera notée $p(E)$.

Partie A

1. Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1€ par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5€ ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
 - a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.
 - b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$.
Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes, l'équation : $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$,
 \bar{z} étant le conjugué de z .

2. On considère le point A d'affixe $4 - 2i$.

Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit D le point d'affixe $2i$.

- a) Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que :

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

- b) Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2 e^{i\theta}$,
 θ appartenant à \mathbf{R} .

4. À tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-1}{\bar{z}+2}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $|z'| = 1$.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A\left(\frac{2}{3}, -3, 2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3}, 0, -4\right)$.

On note I le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1. Soit E le barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(B; 1)$.
 - a) Calculer les coordonnées de E .
 - b) Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\|2\overline{MA} + \overline{MB}\| = 3\|\overline{MO}\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$.
 - c) Montrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.
2. a) Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P) .
En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.
 - b) Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = 12$.
En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 4\sqrt{3} - 1\right)$.
 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID) .
 - b) En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + x \ln x$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire A du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On note M et N les points de C_f d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.

La figure est donnée en annexe, page 6.

1.
 - a) Montrer que f est positive sur $[1, 2]$.
 - b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.
 - c) Soit E le point d'abscisse $\frac{4}{e}$.
Montrer que, sur l'intervalle $[1, 2]$, le point E est l'unique point de C_f en lequel la tangente à C_f est parallèle à (MN) .
 - d) On appelle T la tangente à C_f au point E .
Montrer qu'une équation de T est : $y = (2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$.
2. Soit g la fonction définie sur $[1, 2]$ par : $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1 \right]$.
 - a) Montrer que pour tout x de $[1, 2]$: $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$.
 - b) Étudier les variations de g sur $[1, 2]$ et en déduire la position relative de C_f et de la tangente T sur cet intervalle.
3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T .
On admet que la courbe C_f reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1, 2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.
 - a) Calculer les aires des trapèzes $MNQP$ et $M'N'QP$.
 - b) En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de A d'amplitude 10^{-1} .

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de A .

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x \ln x \, dx$.
2. En déduire la valeur exacte de A .

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie

