Exercice 4 (*7 points*)

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I) Existence et unicité de la solution.

On note f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1) Démontrer que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2) Etude du signe de la fonction f.
   a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur **R**.
   b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur **R**, notée α.
   c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   d) Etudier le signe de f sur l'intervalle $[0, \alpha]$.

II) Deuxième approche.

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1) Démontrer que l' équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation : $g(x) = x$.

2) En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3) Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0, \alpha]$.

III) Construction d'une suite de réels ayant pour limite α.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

3) Justifier l'égalité : $g(l) = l$. En déduire la valeur de l.

4) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.