

## EXERCICE 4

### I) Existence et unicité de la solution

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}x \text{ solution de l'équation (E)} &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \text{ et } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \text{ (car } \frac{1}{e^0} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.\end{aligned}$$

Pour tout réel  $x$ ,  $x$  est solution de l'équation (E) si et seulement si  $f(x) = 0$ .

2) a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$

$$f'(x) = 1 + e^{-x}.$$

Pour tout réel  $x$ , on a  $e^{-x} > 0$  et donc  $f'(x) > 0$ . Par suite

$f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

b •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -e^X = -\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

• Ainsi, la fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On sait alors que pour tout réel  $k$  de l'intervalle  $]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = \mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une solution et une seule dans  $\mathbb{R}$ . En particulier, l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution et une seule dans  $\mathbb{R}$  que l'on note  $\alpha$ .

c) On a  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-1/2} = -0,1\dots < 0$  et  $f(1) = 1 - e^{-1} = 0,6\dots > 0$ . Puisque  $f(\alpha) = 0$ , on a donc  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(\alpha) \leq f(1)$  et donc, puisque  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ .

$$\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

d) Soit  $x \in [0, \alpha]$ . Puisque  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a  $f(x) \leq f(\alpha)$  ou encore  $f(x) \leq 0$ .

La fonction  $f$  est négative sur  $[0, \alpha]$ .

### II) Deuxième approche

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}g(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \\ &\Leftrightarrow 1+x = x(1+e^x) \text{ (car } 1+e^x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow 1+x = x+xe^x \Leftrightarrow xe^x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0.\end{aligned}$$

Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$ .

2) L'équation  $f(x) = 0$  admet une solution et une seule dans  $\mathbb{R}$  à savoir  $\alpha$  et donc l'équation  $g(x) = x$  admet une solution et une seule dans  $\mathbb{R}$  à savoir  $\alpha$ .

3)  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$

$$g'(x) = \frac{1(1 + e^x) - (1 + x)e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Puisque pour tout réel  $x$ , on a  $(1 + e^x)^2 > 0$ ,  $g'(x)$  est pour tout réel  $x$  du signe de  $1 - xe^x$ . Maintenant, d'après la question I)2)d), la fonction  $f$  est négative sur  $[0, \alpha]$ . Soit alors  $x$  un réel de  $[0, \alpha]$ .

$$\begin{aligned} f(x) \leq 0 &\Rightarrow x - e^{-x} \leq 0 \Rightarrow x \leq e^{-x} \Rightarrow x \leq \frac{1}{e^x} \\ &\Rightarrow xe^x \leq 1 \text{ (car } e^x > 0) \\ &\Rightarrow 1 - xe^x \geq 0. \end{aligned}$$

Finalement, la fonction  $g'$  est positive sur  $[0, \alpha]$  et donc

la fonction  $g$  est croissante sur  $[0, \alpha]$ .

### III) Construction d'une suite de réels ayant pour limite $\alpha$

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

• Déjà  $u_0 = 0$ , puis  $u_1 = \frac{1+0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$ . Or, d'après la question I)2)c),  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  ce qui montre que  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ .

L'encadrement est donc vrai quand  $n = 0$ .

• Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ . Puisque  $g$  est croissante sur  $[0, \alpha]$ , on en déduit que

$g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha)$  ou encore  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$  et en particulier  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ .

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

2) Ainsi d'une part, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  ce qui montre que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. D'autre part, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq \alpha$  ce qui montre que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par  $\alpha$ . En résumé la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée et donc converge.

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

3) Notons  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et en particulier en  $\ell$ . On en déduit que quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $g(u_n)$  tend vers  $g(\ell)$ . Par suite

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell).$$

Ainsi, le réel  $\ell$  est solution de l'équation  $g(x) = x$ . La question II)2) permet alors d'affirmer que  $\ell = \alpha$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .

4) On a  $u_0 = 0$  puis  $u_1 = 0,5$ . La machine fournit alors  $u_2 = 0,5663110032\dots$ ,  $u_3 = 0,567143165\dots$  et finalement

$u_4 = 0,567143$  arrondi à la sixième décimale.