Exercice 4 (*7 points*)
Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I) Existence et unicité de la solution.

On note f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1) Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2) Etude du signe de la fonction f.
   a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur **R**.
   b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur **R**, notée α.
   c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   d) Etudier le signe de f sur l'intervalle $[0, \alpha]$.

II) Deuxième approche.

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation : $g(x) = x$.

2) En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3) Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0, \alpha]$.

III) Construction d'une suite de réels ayant pour limite α.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel *n*, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

3) Justifier l'égalité : $g(l) = l$. En déduire la valeur de l.

4) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

EXERCICE 4

I) Existence et unicité de la solution

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \text{ solution de l'équation } (E) &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \text{ et } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \text{ (car } \frac{1}{e^0} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ x \text{ est solution de l'équation } (E) \text{ si et seulement si } f(x) = 0.}$$

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x) = 1 + e^{-x}.$$

Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x) > 0$. Par suite

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

b • $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} -e^X = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

• Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ que l'on note α.

c) On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-1/2} = -0,1\ldots < 0$ et $f(1) = 1 - e^{-1} = 0,6\ldots > 0$. Puisque $f(\alpha) = 0$, on a donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(\alpha) \leq f(1)$ et donc, puisque f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

$$\boxed{\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$$

d) Soit $x \in [0, \alpha]$. Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) \leq f(\alpha)$ ou encore $f(x) \leq 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est négative sur } [0, \alpha].}$$

II) Deuxème approche

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \\ &\Leftrightarrow 1 + x = x(1 + e^x) \text{ (car } 1 + e^x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow 1 + x = x + xe^x \Leftrightarrow xe^x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x.}$$

2) L'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ à savoir α et donc l'équation $g(x) = x$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ à savoir α.

3) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$g'(x) = \frac{1(1+e^x) - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}.$$

Puisque pour tout réel x, on a $(1+e^x)^2 > 0$, $g'(x)$ est pour tout réel x du signe de $1-xe^x$. Maintenant, d'après la question I)2)d), la fonction f est négative sur $[0, \alpha]$. Soit alors x un réel de $[0, \alpha]$.

$$\begin{aligned} f(x) \leq 0 \Rightarrow x - e^{-x} \leq 0 \Rightarrow x \leq e^{-x} \Rightarrow x \leq \frac{1}{e^x} \\ &\Rightarrow xe^x \leq 1 \text{ (car } e^x > 0) \\ &\Rightarrow 1 - xe^x \geq 0. \end{aligned}$$

Finalement, la fonction g' est positive sur $[0, \alpha]$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est croissante sur } [0, \alpha].}$$

III) Construction d'une suite dé réels ayant pour limite α

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

- Déjà $u_0 = 0$, puis $u_1 = \frac{1+0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$. Or, d'après la question I)2)c), $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ce qui montre que $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. L'encadrement est donc vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. Puisque g est croissante sur $[0, \alpha]$, on en déduit que $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha)$ ou encore $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ et en particulier $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.}$$

2) Ainsi d'une part, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'autre part, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \alpha$ ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par α. En résumé la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et donc converge.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

3) Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en ℓ. On en déduit que quand n tend vers $+\infty$, $g(u_n)$ tend vers $g(\ell)$. Par suite

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell).$$

Ainsi, le réel ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$. La question II)2) permet alors d'affirmer que $\ell = \alpha$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

4) On a $u_0 = 0$ puis $u_1 = 0,5$. La machine fournit alors $u_2 = 0,5663110032\ldots$, $u_3 = 0,567143165\ldots$ et finalement

$$\boxed{u_4 = 0,567143 \text{ arrondi à la sixième décimale.}}$$

