

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Polynésie

EXERCICE 1

1.

1. Soit M un point du plan différent du point B . On note z son affixe (z est différent de -1).

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow z-1 = z(z+1) \text{ et } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i. \end{aligned}$$

Les points invariants par f sont les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

2.

a) Soit z un nombre complexe différent de -1 .

$$(z' - 1)(z + 1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1 \right) (z + 1) = \frac{-2}{z+1}(z + 1) = -2 (*).$$

b) En prenant les modules des deux membres, on obtient $|z' - 1| \cdot |z + 1| = |-2| = 2$.

$$\text{Pour tout complexe } z \text{ différent de } -1, |z' - 1| = \frac{2}{|z + 1|}.$$

L'égalité $|z' - 1| \times |z + 1| = 2$ montre en particulier que $z' - 1 \neq 0$ et donc qu'un argument de $z' - 1$ existe. En passant aux arguments dans la relation (*), on obtient $\arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \arg(-2) = \pi \pmod{2\pi}$.

$$\text{Pour tout complexe } z \text{ différent de } -1, \arg(z' - 1) = -\arg(z + 1) + \pi \pmod{2\pi}.$$

Ceci s'interprète géométriquement.

$$AM' = |z' - a| = |z' - 1| = \frac{2}{|z + 1|} = \frac{2}{BM},$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) &= \arg(z \overrightarrow{AM'}) = \arg(z' - a) \\ &= \arg(z' - 1) = \pi - \arg(z + 1) = \pi - (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } B, AM' = \frac{2}{BM} \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \pi - (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) \pmod{2\pi}.$$

3. Soit M un point du plan distinct de B .

$$M \in (C) \Leftrightarrow BM = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM' = 1 \Leftrightarrow M' \in (C').$$

4.

a) $p + 1 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 2e^{2i\pi/3}.$

$$p + 1 = 2e^{2i\pi/3}.$$

b) $BP = |p - b| = |p + 1| = |2e^{2i\pi/3}| = 2.$ Donc

P appartient au cercle (C).

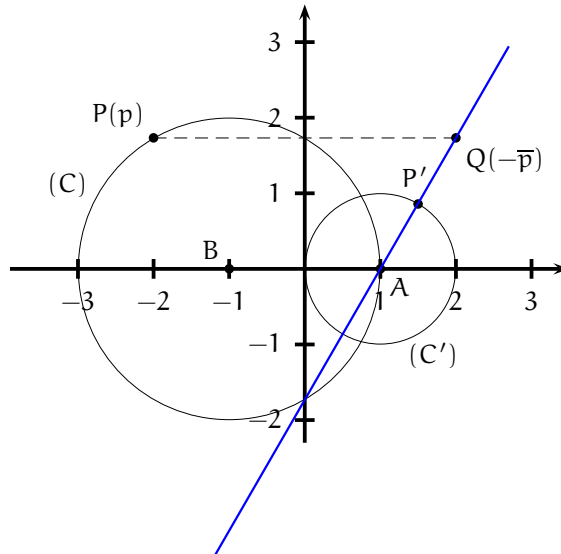
c) D'après 2. b), $(p' - 1)(p + 1) = -2 \neq 0$ et en particulier p' est différent de 1 ou encore P' n'est pas le point A. D'autre part, p n'est pas réel. Il en est de même de $-\bar{p}$. En particulier, $-\bar{p}$ est différent de 1 ou encore Q n'est pas le point A. Ensuite,

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP'}) &= \arg(p' - 1) - \arg(-\bar{p} - 1) = \arg(p' - 1) - \arg(-\overline{p + 1}) \\ &= \arg(p' - 1) - (\pi - \arg(p + 1)) \\ &= \arg(p' - 1) + \arg(p + 1) - \pi \\ &= 0 \quad (2\pi) \quad (\text{d'après 2. b}) \end{aligned}$$

On en déduit que les points A, P et Q sont alignés.

d) D'après 4. b) et 3., le point P' est sur (C') . D'autre part, d'après c), $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP'}) = 0 \quad (2\pi)$ ce qui montre que P' est sur la demi-droite $[AQ)$.

Pour construire le point P' , on commence donc par construire le symétrique du point P par rapport à l'axe (Oy) . On trace ensuite la droite (AQ) . Elle coupe le cercle (C') en deux points. Un et un seul de ces deux points est sur la demi-droite (AQ) : le point P' .



EXERCICE 2

Proposition 1. Vrai

Proposition 2. Faux

Proposition 3. Faux

Proposition 4. Vrai

Proposition 5. Vrai

Démonstrations.

Proposition 1. Soit n un entier naturel non nul.

$$2^{2n} - 1 = 4^n - 1^n = (4 - 1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1) = 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1).$$

Comme $4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1$ est un entier relatif, on a montré que 3 divise $2^{2n} - 1$. Le résultat reste vrai quand $n = 0$ car dans ce cas, $2^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0$ (3 divise bien 0 puisque $3 \times 0 = 0$).

Proposition 2. Prenons $x_0 = 2$. Alors, $x_0^2 + x_0 = 6$ et en particulier $x_0^2 + x_0 \equiv 0 \pmod{6}$. Mais $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Proposition 3. Le couple $(-1, -3)$ est une solution mais n'est pas de la forme $(4+10k, 9+24k)$, $k \in \mathbb{Z}$ car $4+10k = 2(2+5k)$ est un nombre pair alors que -1 ne l'est pas. Les solutions sont les couples de la forme $(4+5k, 9+24k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Les couples de l'énoncé sont effectivement des couples solutions, mais ce ne sont pas tous les couples solutions.

Proposition 4. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$ et tels que $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$. On note d leur PGCD et m leur PPCM. On a alors

$$d \leq a < b \leq m = d + 1.$$

Ceci montre que $a = d$ et $b = m = d + 1 = a + 1$. Mais alors a divise $a + 1$ puis divise $(a + 1) - a = 1$. Donc, nécessairement $a = 1$ et $b = 2$. Réciproquement, si $a = 1$ et $b = 2$ alors $d = 1$, $m = 2$ et on a bien $m - d = 1$.

Proposition 5. $M = 100a + 10b + c$ et $N = 100b + 10c + a$. Supposons que M soit divisible par 27.

$M - N = 99a - 90b - 9c = 9(11a - 10b - c)$. Ainsi, $M - N$ est toujours divisible par 9 et est divisible par 27 si et seulement si $11a - 10b - c$ est divisible par 3. De plus $11a - 10b - c \equiv -a - b - c \pmod{3}$. Donc

$M - N$ est divisible par 27 si et seulement si $a + b + c$ est divisible par 3.

Si M est divisible par 27, alors M est en particulier divisible par 3. On sait qu'il en est de même de la somme de ses chiffres $a + b + c$. Ceci montre que $M - N$ est divisible par 27.

EXERCICE 3

1. a) 572 personnes n'ont eu aucun retard le premier mois et donc $1000 - 572 = 428$ personnes ont eu au moins un retard le premier mois. La probabilité cherchée est

$$\frac{428}{1000} = 0,428.$$

b) 572 personnes n'ont eu aucun retard le premier mois. Parmi celles-ci, $250 + 60 = 310$ personnes ont eu au moins un retard le deuxième mois. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{310}{572} = \frac{155}{286} = 0,54\dots$$

2. a) $p_1 = \frac{572}{1000} = 0,572$, $q_1 = \frac{318}{1000} = 0,318$ et $r_1 = \frac{110}{1000} = 0,11$.

b) (Les probabilités fournies par l'énoncé sont des probabilités conditionnelles. Par exemple, $0,46 = p_{A_n}(A_{n+1})$). Chaque mois, un personne a soit 0 retard, soit exactement un retard, soit au moins deux retard, chacune de ces possibilités excluant les deux autres. Donc

$$\begin{aligned} p(A_{n+1}) &= p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) + p(A_{n+1} \cap C_n) \\ &= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(A_{n+1}) + p(C_n) \times p_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n. \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n.$$

c) Soit n un entier naturel non nul. On a bien sûr $p_n + q_n + r_n = 1$ ou encore $q_n + r_n = 1 - p_n$. On en déduit que

$$p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66(q_n + r_n) = 0,46p_n + 0,66(1 - p_n) = -0,2p_n + 0,66.$$

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66.$$

d) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,55 = -0,2p_n + 0,66 - 0,55 = -0,2p_n + 0,11 = -0,2(p_n - 0,55) = -0,2u_n.$$

$$\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } -0,2.$$

e) Puisque $-1 < -0,2 < 1$, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et comme $p_n = 0,55 + u_n$, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,55.$$

EXERCICE 4

Partie A

1. f est dérivable sur \mathbb{R} et donc continue sur \mathbb{R} . On en déduit que F est définie et dérivable sur \mathbb{R} . F est la primitive de f qui s'annule en 2.

Pour tout réel x , on a $F'(x) = f(x)$. Le tableau de variation de la fonction f montre en particulier que f est strictement positive sur \mathbb{R}^* et s'annule en 0. On en déduit que

F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. Pour tout réel x de $[2, 3]$, on a $0 \leq f(x) \leq 4e^{-2}$. Par positivité de l'intégrale, on a alors $F(3) = \int_2^3 f(x) dx \geq 0$ et par croissance de l'intégrale, on a

$$F(3) = \int_2^3 f(x) dx \leq \int_2^3 4e^{-2} dx = (3-2) \cdot 4e^{-2} = 4e^{-2}.$$

Donc

$$0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}.$$

Partie B

1. a) f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Ainsi, f' est strictement positive sur $]0, 2[$, strictement négative sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et s'annule en 0 et 2. f est donc strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$, strictement croissante sur $[0, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. Le tableau de variation de la fonction f est bien celui donné dans la partie A.

b) Soit x un réel. Soit M le point de (C) d'abscisse x et N le point de (Γ) de même abscisse.

$$y_M - y_N = f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = (x^2 - 1)e^{-x}.$$

Cette dernière expression est du signe de $x^2 - 1$. On en déduit que

- $y_M - y_N > 0$ si $x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,
- $y_M - y_N < 0$ si $x \in] -1, 1[$,
- $y_M - y_N = 0$ si $x \in \{-1, 1\}$.

(C) est strictement au-dessus de (Γ) sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,
(C) est strictement au-dessous de (Γ) sur $] -1, 1[$
(C) et (Γ) se coupent aux points de coordonnées $(-1, e)$ et $(1, e^{-1})$

2. a) H est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$H'(x) = (-2x - 2)e^{-x} + (-x^2 - 2x - 1)(-e^{-x}) = e^{-x}(x^2 + 2x + 1 - 2x - 2) = (x^2 - 1)e^{-x} = h(x).$$

Donc

H est une primitive de h sur \mathbb{R} .

b) Soit α un réel supérieur ou égal à 1. D'après 1. b), pour tout réel x de $[1, \alpha]$, on a $g(x) \leq f(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha) &= \int_1^\alpha (f(x) - g(x)) dx = \int_1^\alpha (x^2 - 1)e^{-x} dx = \int_1^\alpha h(x) dx \\ &= [H(x)]_1^\alpha = [(-x^2 - 2x - 1)e^{-x}]_1^\alpha = -(\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha} + 4e^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{pour tout réel } \alpha, \mathcal{A}(\alpha) = \frac{4}{e} - (\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha}.$$

c) Pour tout réel α , on a $-(\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha} = -\alpha^2 e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha}$. D'après les théorèmes de croissances comparées, on sait que chacun de ces termes tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \frac{4}{e}.$$

3. a) Voir graphique plus loin.

b) $PQ = |x_P - x_Q| = x_P - x_Q$ (par lecture graphique, $x_P > x_Q$) et $f(x_P) = m = g(x_Q)$.

c) L'égalité $PQ = 1$ fournit $x_Q = x_P - 1$. L'égalité $f(x_P) = g(x_Q)$ s'écrit alors $x_P^2 e^{-x_P} = e^{-(x_P-1)}$ ou encore (puisque $e^{-x_P} \neq 0$) $x_P^2 = e$ ou enfin $x_P = -\sqrt{e}$ (car $x_P \leq -1$).

$$x_P = -\sqrt{e} = -1,64\dots$$

