

## EXERCICE 4 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On s'intéresse aux fonctions  $f$  dérivables sur  $[0, +\infty[$  vérifiant les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) : \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0, +\infty[ \quad f'(x) = 4 - (f(x))^2 \\ (2) : f(0) = 0 \end{array} \right.$$

On admet qu'il existe une unique fonction  $f$  vérifiant simultanément (1) et (2).

*Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.*

*L'annexe, page 6, sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.*

### Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction  $f$ , on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés  $(M_n)$ , d'abscisse  $x_n$  et d'ordonnée  $y_n$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad y_{n+1} = -0,2 y_n^2 + y_n + 0,8 \end{array} \right.$$

1.
  - a) Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe, page 6. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à  $10^{-4}$  près.
  - b) Placer, sur le graphique donné en annexe à la page 6, les points  $M_n$  pour  $n$  entier naturel inférieur ou égal à 7.
  - c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite  $(y_n)$  et sur sa convergence ?
2.
  - a) Pour  $x$  réel, on pose  $p(x) = -0,2 x^2 + x + 0,8$ .  
Montrer que si  $x \in [0, 2]$  alors  $p(x) \in [0, 2]$ .
  - b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq y_n \leq 2$ .
  - c) Étudier le sens de variation de la suite  $(y_n)$ .
  - d) La suite  $(y_n)$  est-elle convergente ?

### Partie B. Étude d'une fonction

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = 2 \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$  et  $(C_g)$  sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction  $g$  vérifie les conditions (1) et (2).
2.
  - a) Montrer que  $(C_g)$  admet une asymptote  $\Delta$  dont on donnera une équation.
  - b) Étudier les variations de  $g$  sur  $[0, +\infty[$ .
3. Déterminer l'abscisse  $\alpha$  du point d'intersection de  $\Delta$  et de la tangente à  $(C_g)$  à l'origine.
4. Tracer, dans le repère de l'annexe, page 6, la courbe  $(C_g)$  et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

*Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.*

**Exercice 4 : Annexe**

**Partie A**

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_n$	0	0,2	0,4					
$y_n$	0	0,8000	1,4720					

**Partie B**

