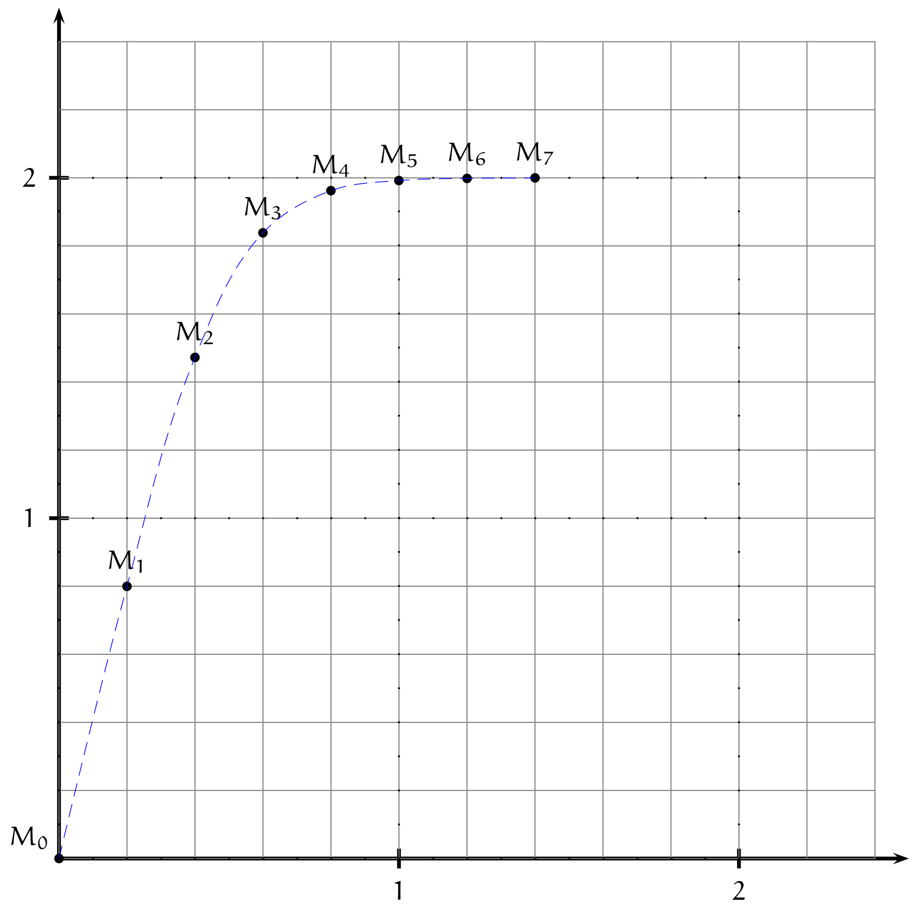
EXERCICE 4

Partie A : étude d'une suite

1. a) La machine fournit

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1	$1,2$	$1,4$
y_n	0	$0,8000$	$1,4720$	$1,8386$	$1,9625$	$1,9922$	$1,9984$	$1,9996$

b)



c) Il semblerait que la suite (y_n) soit strictement croissante et convergente (de limite 2 ?).

2. a) p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$p'(x) = -0,4x + 1 = -0,4(x - 2,5).$$

Mais alors, pour tout réel x de $[0,2]$, $p'(x) \geq 0$. p est donc croissante sur $[0,2]$. Par suite,

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\Rightarrow p(0) \leq p(x) \leq p(2) \Rightarrow 0,8 \leq p(x) \leq 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq p(x) \leq 2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{si } x \in [0,2] \text{ alors } p(x) \in [0,2].}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $y_n \in [0,2]$.
• $y_0 = 0$ et donc $y_0 \in [0,2]$.
• Soit n un entier naturel. Supposons que $y_n \in [0,2]$. Alors d'après a), $p(y_n) \in [0,2]$ et donc $y_{n+1} \in [0,2]$.
On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq y_n \leq 2.}$$

c) Soit n un entier naturel.

$$y_{n+1} - y_n = (-0,2y_n^2 + y_n + 0,8) - y_n = -0,2y_n^2 + 0,8 = -0,2(y_n^2 - 4) = -0,2(y_n + 2)(y_n - 2).$$

Puisque y_n est inférieur ou égal à 2, cette dernière expression est positive.
On a montré que pour tout entier naturel n, on a $y_{n+1} - y_n \geq 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est croissante.}}$$

d) D'après c), la suite (y_n) est croissante et d'après b), la suite (y_n) est majorée par 2. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est convergente.}}$$

Partie B : étude d'une fonction

1. On a déjà $g(0) = 2 \times \dfrac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 2 \times \dfrac{1-1}{1+1} = 0$. D'autre part, g est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$g'(x) = 2\frac{(4e^{4x})(e^{4x}+1) - (e^{4x}-1)(4e^{4x})}{(e^{4x}+1)^2} = 8\frac{e^{4x}\left((e^{4x}+1) - (e^{4x}-1)\right)}{(e^{4x}+1)^2} = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}.$$

D'autre part,

$$4 - (g(x))^2 = 4 - 4\frac{(e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2} = 4\left(1 - \frac{(e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2}\right) = 4\frac{(e^{4x}+1)^2 - (e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2} = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}.$$

On a montré que

$$\boxed{(1) : g(0) = 0 \text{ et } (2) : \text{pour tout réel positif } x,\ g'(x) = 4 - (g(x))^2.}$$

2. a) Pour tout réel positif x, $e^{4x} \neq 0$ et on peut donc écrire

$$g(x) = 2\frac{e^{4x}(1 - e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} = 2\frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-4x} tend vers 0 et donc $g(x)$ tend vers 2.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2.}$$

On en déduit encore que

$$\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = 2 \text{ est asymptote à } (C_g) \text{ en } +\infty.}$$

b) On a vu à la question 1 que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout réel positif x

$$g'(x) = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}.$$

g' est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

3. Notons (T) la tangente à (C_g) en O (on rappelle que $g(0) = 0$). Puisque $g'(0) = 16\dfrac{1}{(1+1)^2} = 4$, une équation de (T) est $y = 4x$. Les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (T) vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 4x \end{array}\right. \text{ qui est équivalent à } \left\{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{les coordonnées du point d'intersection de } (\Delta) \text{ et de } (T) \text{ sont } (\frac{1}{2}, 2).}$$

4.