EXERCICE 4 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.
On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0,+\infty[$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} (1)\ :\ \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0,+\infty[\quad f'(x) = 4-(f(x))^2 \\ \\ (2)\ :\ f(0)=0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.
L'annexe, page 6, sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0=0 & \text{et pour tout entier naturel } n, \quad x_{n+1} = x_n + 0{,}2 \\ y_0=0 & \text{et pour tout entier naturel } n, \quad y_{n+1} = -0{,}2\,y_n^{\,2} + y_n + 0{,}8 \end{cases}$$

1. **a)** Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe, page 6. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

b) Placer, sur le graphique donné en annexe à la page 6, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. **a)** Pour x réel, on pose $p(x) = -0{,}2\,x^2 + x + 0{,}8$.
Montrer que si $x \in [0,2]$ alors $p(x) \in [0,2]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq y_n \leq 2$.

c) Étudier le sens de variation de la suite (y_n).

d) La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = 2\,\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et (C_g) sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. **a)** Montrer que (C_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b) Étudier les variations de g sur $[0,+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (C_g) à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, page 6, la courbe (C_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie **B**.

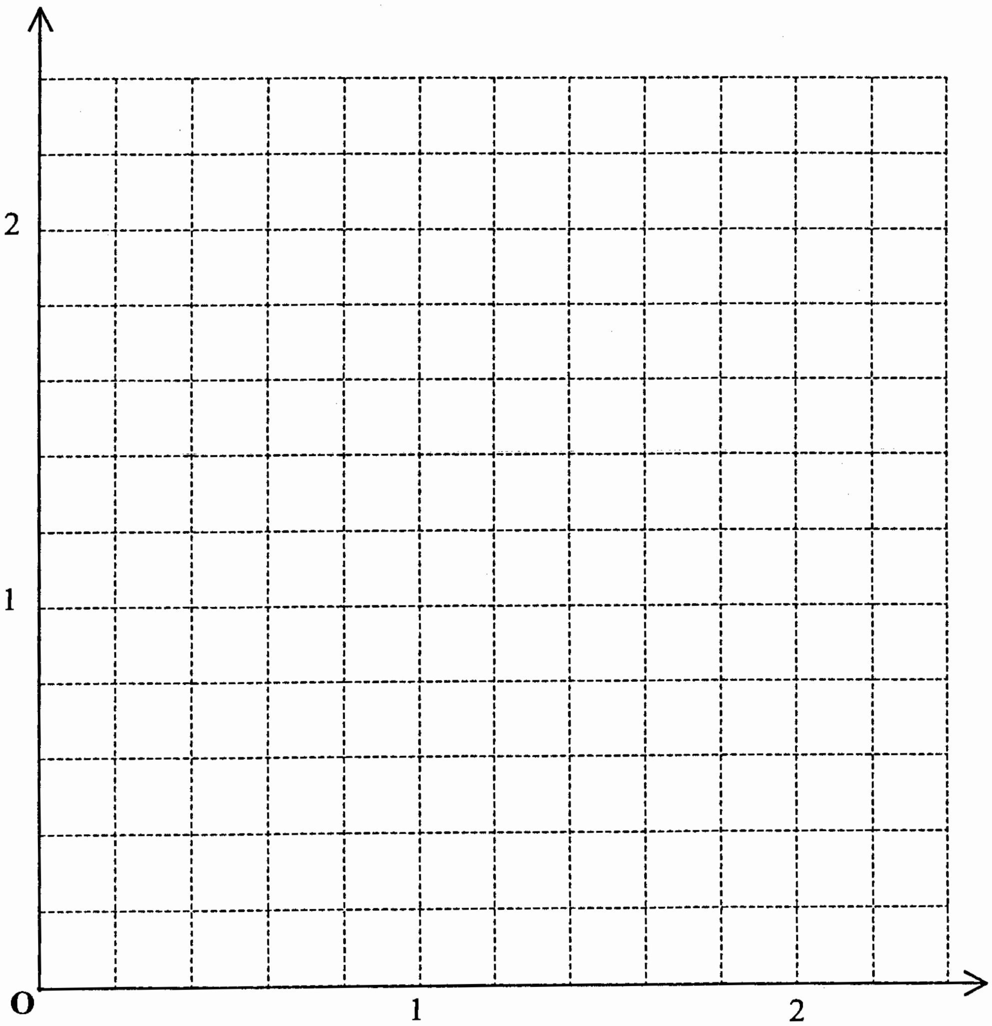
Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 4 : Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

Partie B



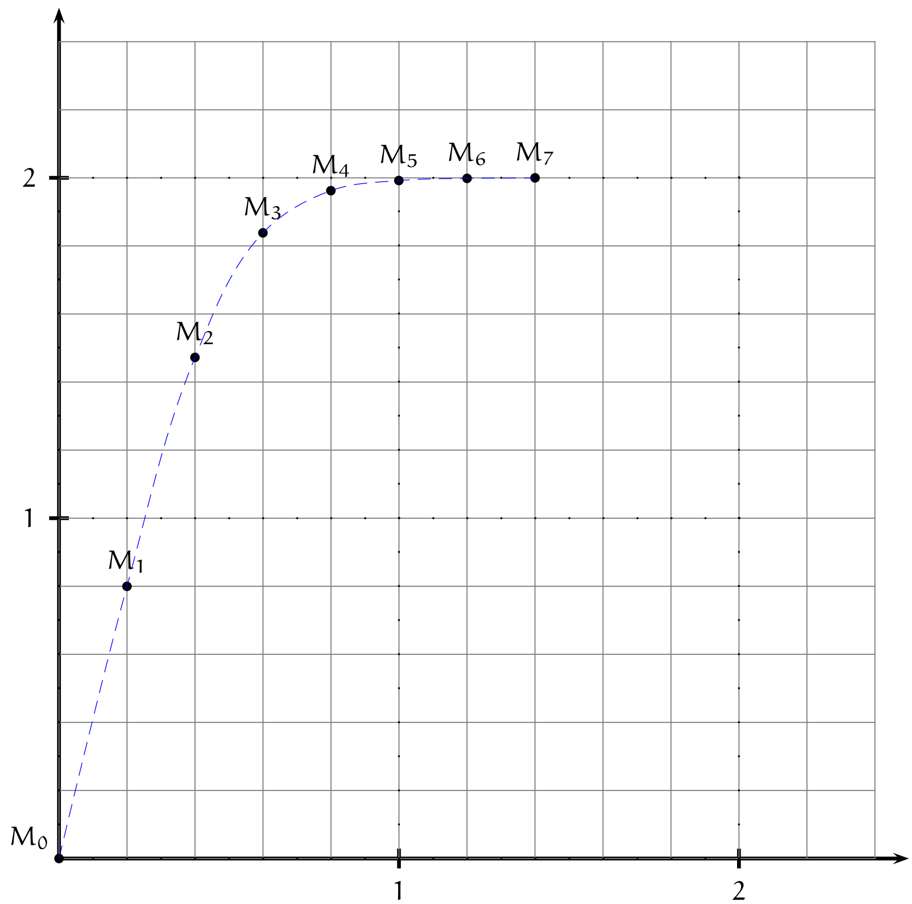
EXERCICE 4

Partie A : étude d'une suite

1. **a)** La machine fournit

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
y_n	0	0,8000	1,4720	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9996

b)



c) Il semblerait que la suite (y_n) soit strictement croissante et convergente (de limite 2 ?).

2. **a)** p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$p'(x) = -0,4x + 1 = -0,4(x - 2,5).$$

Mais alors, pour tout réel x de $[0,2]$, $p'(x) \geq 0$. p est donc croissante sur $[0,2]$. Par suite,

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\Rightarrow p(0) \leq p(x) \leq p(2) \Rightarrow 0,8 \leq p(x) \leq 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq p(x) \leq 2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{si } x \in [0,2] \text{ alors } p(x) \in [0,2].}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $y_n \in [0,2]$.

• $y_0 = 0$ et donc $y_0 \in [0,2]$.

• Soit n un entier naturel. Supposons que $y_n \in [0,2]$. Alors d'après a), $p(y_n) \in [0,2]$ et donc $y_{n+1} \in [0,2]$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq y_n \leq 2.}$$

c) Soit n un entier naturel.

$$y_{n+1} - y_n = (-0,2y_n^2 + y_n + 0,8) - y_n = -0,2y_n^2 + 0,8 = -0,2(y_n^2 - 4) = -0,2(y_n+2)(y_n-2).$$

Puisque y_n est inférieur ou égal à 2, cette dernière expression est positive.

On a montré que pour tout entier naturel n, on a $y_{n+1} - y_n \geq 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est croissante.}}$$

d) D'après c), la suite (y_n) est croissante et d'après b), la suite (y_n) est majorée par 2. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est convergente.}}$$

Partie B : étude d'une fonction

1. On a déjà $g(0) = 2 \times \dfrac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 2 \times \dfrac{1-1}{1+1} = 0$. D'autre part, g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$g'(x) = 2\frac{(4e^{4x})(e^{4x}+1) - (e^{4x}-1)(4e^{4x})}{(e^{4x}+1)^2} = 8\frac{e^{4x}\left((e^{4x}+1) - (e^{4x}-1)\right)}{(e^{4x}+1)^2} = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}.$$

D'autre part,

$$4 - (g(x))^2 = 4 - 4\frac{(e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2} = 4\left(1 - \frac{(e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2}\right) = 4\frac{(e^{4x}+1)^2 - (e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2} = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}.$$

On a montré que

$$\boxed{(1) : g(0) = 0 \text{ et } (2) : \text{pour tout réel positif } x,\ g'(x) = 4 - (g(x))^2.}$$

2. a) Pour tout réel positif x, $e^{4x} \neq 0$ et on peut donc écrire

$$g(x) = 2\frac{e^{4x}(1 - e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} = 2\frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-4x} tend vers 0 et donc $g(x)$ tend vers 2.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2.}$$

On en déduit encore que

$$\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = 2 \text{ est asymptote à } (C_g) \text{ en } +\infty.}$$

b) On a vu à la question 1 que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout réel positif x

$$g'(x) = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}.$$

g' est strictement positive sur $[0,+\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

3. Notons (T) la tangente à (C_g) en O (on rappelle que $g(0)=0$). Puisque $g'(0)=16\dfrac{1}{(1+1)^2}=4$, une équation de (T) est $y=4x$. Les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (T) vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l} y=2 \\ y=4x \end{array}\right. \quad \text{qui est équivalent à} \quad \left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{les coordonnées du point d'intersection de } (\Delta) \text{ et de } (T) \text{ sont } (\frac{1}{2},2).}$$

4.