

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur \mathbf{R} :

| | | | | |
|-----|-----------|-----|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
| f | $+\infty$ | 0 | $4e^{-2}$ | 0 |

Le tableau de variation est complété par des flèches indiquant les variations de la fonction f : une flèche descendante de $+\infty$ à 0 , une flèche ascendante de 0 à $4e^{-2}$, et une flèche descendante de $4e^{-2}$ à 0 .

On définit la fonction F sur \mathbf{R} par $F(x) = \int_2^x f(t) dt$.

1. Déterminer les variations de la fonction F sur \mathbf{R} .
2. Montrer que $0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}$.

Partie B

La fonction f considérée dans la partie A est la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 e^{-x}$.

On appelle g la fonction définie sur \mathbf{R} par $g(x) = e^{-x}$.

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes sont tracées en annexe, page 7.

1. a) Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A.
On ne demande pas de justifier les limites.
b) Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).
2. Soit h la fonction définie sur \mathbf{R} par $h(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.
a) Montrer que la fonction H définie sur \mathbf{R} par $H(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur \mathbf{R} .
b) Soit un réel α supérieur ou égal à 1.
On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.
c) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) au point $P(x_p ; m)$ et la courbe (Γ) au point $Q(x_Q ; m)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_p appartenant à l'intervalle $] -\infty, -1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

- a) Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe, page 7) les points P et Q tels que $x_p \in] -\infty, -1]$ et $PQ = 1$.
- b) Exprimer la distance PQ en fonction de x_p et de x_Q .
Justifier l'égalité $f(x_p) = g(x_Q)$.
- c) Déterminer la valeur de x_p telle que $PQ = 1$.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4

